DAS

DYNAMIDEN-SYSTEM.

GRUNDZÜGE

EINER

MECHANISCHEN PHYSIK

VON

F. REDTENBACHER,

Grossherzoglich Badischer Hofrath, Ritter des Zähringer Löwenordens, d. Z. Direktor der polytechnischen Schule zu Carlsruhe und Professor des Maschinenbaues.

MIT EINER LITHOGRAPHIRTEN TAFEL.

MANNHEIM.

VERLAGSBUCHHANDLUNG VON FRIEDRICH BASSERMANN.

1857.

Druck von MALSCH & VOGEL in Carlsruhe.

VORWORT.

Bei den Arbeiten, die ich bis jetzt der Oeffentlichkeit übergeben habe, war ich stets bemüht, so viel als möglich ein Ganzes zu liefern. Diesmal kann ich diesem Grundsatz nicht treu bleiben; das Ganze ist zu mächtig, es ist nicht weniger als das ausgedehnte Gebiet der Physik, das sich nicht so schnell bewältigen lässt.

Die Grundgedanken, auf welchen diese Arbeit beruht, habe ich nicht erst vor Kurzem, sondern schon vor einer langen Reihe von Jahren gefasst, habe sie auch schon, wenigstens theilweise, in meinen im Jahre 1852 erschienenen Prinzipien der Mechanik ausgesprochen, und habe insbesondere die Grundbegriffe, die ich über die Wärme aufstelle, schon vor mehr als zehn Jahren vorgetragen. Auch die mathematischen Untersuchungen sind nicht in jüngst vergangener Zeit entstanden, sondern sind im Gegentheil Bruchstücke von angefangenen und unvollendet gebliebenen Arbeiten, die ich neben meinen wissenschaftlichen das Maschinenwesen betreffenden Arbeiten zu verfolgen bemüht war.

Den Titel „Dynamidensystem" habe ich gewählt, weil durch dieses Wort die Grundanschauung, auf welcher das Ganze beruht, charakterisirt und von den bisher aufgestellten atomistischen Systemen scharf unterschieden wird.

Was unter dem Dynamidensystem zu verstehen ist, findet man in der Einleitung von Seite 11 bis 28 ausführlich erklärt. An Deutlichkeit dürfte es nicht fehlen; über den Werth des Systems wird die Zukunft entscheiden;

was die Untersuchungen bereits geliefert haben, wird man wohl nicht verschmähen, eine vorläufige Durchsicht des Inhaltes wird hierüber Aufschluss geben.

Dieses Dynamidensystem ist keineswegs eine ganz neue Erfindung, es ist vielmehr nur eine weitere Ausbildung und schärfere Auffassung der von *Dalton*, *Fresnel*, *Ampère*, *Poisson* und *Cauchy* aufgestellten atomistischen Theorien. Auch brauche ich mich nicht zu entschuldigen, dass ich von einer atomistischen Anschauung ausgehe, die Geschichte der Wissenschaft fordert es mit unwiderstehlicher Macht. Die dynamische Theorie der Philosophen ist für die mathematische wie für die experimentale Behandlung der Physik ganz unbrauchbar. Die Contakttheorie ist bereits von den ausgezeichnetsten Mathematikern und namentlich von *Lagrange*, *Poisson* und *Cauchy* beinahe vollständig ausgebeutet. Sie hat viele schöne Resultate geliefert, wurde aber schliesslich von all' ihren Anhängern verlassen, weil man die Einsicht gewann, dass aus dieser Theorie die Erscheinungen der sogenannten Imponderabilien nicht hervorgehen können. *Poisson* wurde durch *Fresnel* zur Atomistik bekehrt, und zwar durch den Ausspruch, dass nur in einem aus getrennten Atomen bestehenden Medium, nicht aber in einem continuirlichen die Erscheinung der Farbenzerstreuung vorkommen könne. *Cauchy*, welcher sich ebenfalls lange mit grösstem Erfolg mit der Contakttheorie beschäftigte, hat sie ebenfalls verlassen und ist zur Atomistik übergetreten. Wie hoch er selbst diesen Schritt anschlägt, kann man an den folgenden Worten erkennen, die er wiederholt an die Spitze seiner Abhandlungen stellt: „J'ai donné le „premier les équations générales d'équilibre et de mouvement d'un système „de molécules sollicitées par des forces d'attractien et de répulsion mutuelle."

In der Einleitung ist insbesondere da, wo von den Bewegungszuständen eines Dynamidensystems die Rede ist, Manches etwas leichtsinnig hingesprochen; allein das schadet nicht. Ist es nicht wahr, so wird es die Rechnung verwerfen; ist es wahr, so wird sie es bestätigen. Die Hypothesen sind überhaupt nicht gefährlich, wenn sie nicht mit Wortkünsten, sondern mit exakten Versuchen oder mit scharfen analytischen Reagentien geprüft werden. Auch in der induktiven Periode der Wissenschaft, wo doch die Regel gilt, dass man sich nur am Thatsachentau denkend erheben könne, kann man ohne Hypothesen nicht vorwärts kommen, und selbst die Euklidische Geometrie ist voll von Hypothesen, aber unmittelbar auf jede Hypothese folgt der Beweis ihrer Richtigkeit.

Obgleich ich hier die Ergebnisse meiner Untersuchungen über das Dynamidensystem nicht auseinandersetzen will, sondern mir erlaube eine vorläufige Durchsicht des Inhaltes zu empfehlen, so muss ich doch eines der gewonnenen Resultate mit einigen Worten berühren.

In der Untersuchung über das Mariott'sche Gesetz finde ich, dass es nur dann (annähernd) richtig sein kann, wenn sich die Aetheratome mit einer Kraft abstossen, die ihrer Entfernung verkehrt proportional ist. Bei einer Durchsicht der vor Kurzem erschienenen Metaphysik von *Apelt* habe ich Seite 568 gefunden, dass schon *Newton* zu demselben Resultat gekommen ist. *Newton* sagt: das Mariott'sche Gesetz beweise, dass zwischen den Lufttheilchen Zurückstossungskräfte wirken, die im verkehrten Verhältniss ihrer Entfernung stehen.

Schon vor zwanzig Jahren war ich der Ueberzeugung, dass es für die Physik wie für die Chemie keine andern allgemeinen Prinzipien gibt als die Prinzipien der Mechanik, dass Physik und Chemie schliesslich nichts Anderes sind als Statik und Dynamik der Molekularkräfte. Der seit dieser Zeit gewonnene Thatsachenreichthum hat mich in meiner Ansicht nur bestärkt, und ich werde, so weit es Zeit und Kraft erlaubt, eifrigst bemüht sein, den betretenen Weg zu verfolgen, um vielleicht mit der Zeit etwas Vollständigeres als die vorliegenden Bruchstücke liefern zu können.

Carlsruhe, den 1. Juli 1857.

DER VERFASSER.

INHALT.

EINLEITUNG.

ERSTER ABSCHNITT.

Ueber die Wärme.

ZWEITER ABSCHNITT.

Ueber das Gleichgewicht eines Dynamidensystems.

DRITTER ABSCHNITT.

Bewegung eines Dynamidensystems.

EINLEITUNG.

NOTHWENDIGKEIT DER HYPOTHESEN.

Jede Wissenschaft hat ihre besondere eigenthümliche Entwicklungsgeschichte, und so auch die rationelle Physik, welche sich die Aufgabe stellt, die an den unorganischen Körpern vorkommenden Erscheinungen aus den allgemeinen Gesetzen der Mechanik zu erklären und durch Rechnung nachzuweisen.

Hier bieten sich sogleich zwei Fragen dar, nämlich: 1) ob überhaupt die Lösung dieser Aufgabe in das Bereich der Möglichkeit gehört, und 2) wenn diese Möglichkeit vorhanden ist, auf welche Art die physikalischen und chemischen Erscheinungen aus den allgemeinen Prinzipien der Mechanik erklärt werden können.

Betrachtet man die erstere dieser Fragen vom theoretischen Standpunkt aus, so muss man sagen, dass die Lösung der Aufgabe nur dann möglich ist, wenn die physikalischen und chemischen Erscheinungen auf rein mechanischen Vorgängen beruhen, und dies ist dann der Fall, wenn die Substanzen nichts anderes enthalten als träge Massen und rein mechanisch wirkende Kräfte. Träge Massen sind aber Wesenheiten, die in sich selbst nicht die Fähigkeiten enthalten, aus dem Zustand der Ruhe in einen Zustand der Bewegung, oder aus dem Zustand der Bewegung einer gewissen Art in einen bewegten Zustand anderer Art überzugehen, wohl aber die Fähigkeit besitzen, durch äussere Kraftwirkungen eine Aenderung des ruhigen oder des bewegten Seins zu erleiden; und mechanisch wirkende Kräfte sind Anziehungen oder

Abstossungen zwischen Massentheilchen, die nach der Richtung der Verbindungslinie der Massentheilchen zur Bewegung anregen. Die rationelle Physik ist also nur dann möglich, wenn die Körpersubstanzen in der That gewisse Systeme von trägen Massen sind, die durch mechanisch wirkende Anziehungs- und Abstossungskräfte auf einander einwirken. A priori kann diese Frage nicht entschieden werden, wir sind nicht im Stande zu sagen, was in der Natur möglich ist. Es ist z. B. zwar nicht wahrscheinlich aber doch vielleicht möglich, dass in der Natur Kräfte vorkommen, die nicht in den Stofftheilchen selbst ihren Sitz haben, oder andere Kräfte, die zwar in Stofftheilchen ihren Sitz haben und von da aus andere Stofftheilchen zur Bewegung anregen, jedoch nicht nach der Richtung der Verbindungslinie der Stofftheilchen, sondern etwa nach einer zu dieser Verbindungslinie senkrechten Richtung. Vielleicht gibt es sogar Agentien, die überhaupt zur Bewegung gar nicht anregen, sondern den Stoffen nur gewisse Eigenschaften und Fähigkeiten ertheilen, vermöge welcher sie eigenthümliche Wirkungen hervorzubringen vermögen. Die räthselhaften Erscheinungen der Elektrizität und des Magnetismus, noch mehr aber die wunderbaren Erscheinungen der organischen Natur, dieses unendlich mannigfaltige Bilden und Gestalten aus einigen wenigen Elementarstoffen mahnen zur Vorsicht und deuten darauf hin, dass in der Natur nebst den im oben erklärten Sinne rein mechanisch wirkenden Kräften auch noch aktive Prinzipe anderer Art vorkommen können.

Auch die Erfahrung hat die Frage über die Naturkräfte noch nicht zur Entscheidung gebracht. Zwar unterliegt es heut zu Tage keinem Zweifel, dass die Erscheinungen an und in den ponderablen Stoffen, Aggregatzustand, Kristallbildung, Körperschwingungen, Luftschwingungen und Wasserwellen etc. ganz in das Bereich der Mechanik gehören, und selbst die sogenannten Imponderabilien haben sich wenigstens theilweise den Gesetzen der Mechanik unterworfen. So wie einstens durch *Newton* die Astronomie, so ist in neuester Zeit durch *Cauchy* das Licht ein reines Problem der Mechanik geworden, und auch die Wärme, welche sich so lange gegen jeden Angriff von Seite der Mechanik zu vertheidigen oder zu verbergen wusste, zeigt sich allmählig geneigt, sich durch die Mechanik erobern zu lassen. Nur die elektrischen und magnetischen Erscheinungen sind noch so räthselhaft und scheinen etwas vom Wesen des Mechanismus ganz Verschiedenes zu sein, so dass es das Ansehen hat, als ob da Ursachen und Kräfte im Spiele wären, welche sich von den mechanischen Kräften ganz spezifisch unterscheiden. Durch die Thatsachen der Wirklichkeit ist es also allerdings noch nicht streng ent-

schieden, dass alle physikalischen und chemischen Erscheinungen auf rein mechanischen Wirkungen beruhen, allein es ist doch auch Thatsache, dass sich diese Erscheinungen mehr und mehr, und in dem Maasse als die Beobachtungen und Untersuchungen fortschreiten, den mechanischen Gesetzen fügen. Die Möglichkeit der rationellen Physik erscheint also nach den Thatsachen wenigstens als eine Wahrscheinlichkeit. Allein so wie in allen Dingen entscheiden auch hier schliesslich nur die Erfolge. Diese sprechen aber zu Gunsten der rationellen Physik. Man streiche einmal in Gedanken aus den Lehrbüchern der Physik alles aus, was von Mathematikern herrührt, die im Gebiet der rationellen Physik gearbeitet haben, und sehe dann zu, was noch übrig bleibt. Es gibt jedoch ein Gebiet, in welchem der rationelle Weg bis jetzt noch wenig oder beinahe nichts geleistet hat. Dies ist die Chemie. Aber so viel kann man anderseits wiederum sagen, dass die Chemie sich mehr und mehr gezwungen sieht, die physikalischen Erscheinungen in Erwägung zu ziehen, sich an die Physik inniger anzuschliessen, ähnlich wie die Physik an die Mechanik, und somit ist wenigstens eine Tendenz zu einer Vereinigung vorhanden.

Wir wenden uns nun zur Beantwortung der zweiten von den Eingangs gestellten Fragen, nämlich zur Beantwortung der Frage, auf welchem Wege die rationelle Physik zu Stande gebracht werden kann.

Hier zeigen sich beim ersten Schritte, den man thun will, eigenthümliche Schwierigkeiten. Die physikalischen und chemischen Erscheinungen beruhen grösstentheils auf innern, durch die Sinne und Sinneswerkzeuge nicht wahrnehmbaren Veränderungen in den uns ihrem Wesen nach ganz unbekannten Substanzen. Die Wahrnehmungen und Beobachtungen geben aber mehr nur das Aeussere der Erscheinungen. Wir sollten also eigentlich aus den durch die Sinne wahrgenommenen und durch Beobachtungen so wie Messungen mehr oder weniger bestimmten Erscheinungen vermittelst der Prinzipien der Mechanik bis zu den Ursachen der Erscheinungen zurückgehen. Allein diesen Weg kann die Mechanik nicht einschlagen, denn jede Anwendung der Mechanik setzt jederzeit wenigstens voraus, dass man von dem Massensystem, an und in welchem die Erscheinungen vorkommen, so wie auch von dem System der wirksamen Kräfte eine ganz klare anschauliche Vorstellung habe.

Es bleibt also der rationellen Physik kein anderer Ausweg übrig als der, dass man sich aus der Gesammtheit der physikalischen und chemischen Thatsachen über die innere Organisation der Substanzen eine möglichst naturgemäss scheinende anschauliche Vorstellung bildet, die so bestimmt ist, dass die

Substanzen als bestimmte Massen und Kraftsysteme erscheinen, und hierauf die Prinzipien der Mechanik anzuwenden; d. h. man ist gezwungen, über die Natur der Substanzen eine Hypothese aufzustellen, diese vermittelst der allgemeinen Prinzipien der Mechanik der Rechnung zu unterwerfen, daraus Folgerungen zu ziehen, und nachzusehen, ob und unter welchen Bedingungen die Ergebnisse der Rechnung mit den Thatsachen der Wirklichkeit in Uebereinstimmung zu bringen sind.

Dieser einzig mögliche Weg ist auch derjenige, den die rationelle Physik von jeher befolgt hat, und auf welchem wenn auch nicht alle, so doch sehr viele Gesetze gefunden wurden. Es ist nicht wahr, wenn man sagt, die Naturwissenschaften seien reine Erfahrungswissenschaften, und der einzig richtige und zum Ziele führende Weg sei die Induction. Wer so spricht, ist mit der Geschichte der Naturwissenschaften nicht vertraut. Die wahre Geschichte zeigt, dass jede Naturwissenschaft mit Induction anhebt, mit Deduction schliesst. Die Induction bestimmt, die Deduction erklärt die Erscheinungen. Die meisten Naturwissenschaften, und namentlich die Chemie und gewisse Parthieen der Physik, insbesondere die Wärme, Elektrizität und Magnetismus, befinden sich noch ganz im Stadium der Induction, andere Parthieen der Physik stehen mit einem Fuss in der Induction, mit dem andern in der Deduction, und endlich gibt es auch solche Abschnitte, wie z. B. die Lehre vom Licht, welche bereits vollständig der Deduction anheim gefallen sind. Will man die Begriffe streng nehmen, so muss man sagen, dass die Periode der Induction nur die Vorarbeiten und Vorbereitungen zum wahren wissenschaftlichen Aufbau liefert, und dass dieser erst mit dem allgemein deductiven Verfahren beginnt. Der wissenschaftliche Aufbau der Astronomie beginnt erst mit *Newton*, erst mit der Deduction der Erscheinungen aus dem allgemeinen Gravitationsgesetz. Der wahre wissenschaftliche Aufbau der Optik beginnt erst mit *Young* und *Fresnel*, d. h. mit der Erklärung der Lichterscheinungen aus Aetherschwingungen, oder wenn man die Sache ganz streng nehmen will, erst mit *Cauchy;* denn erst dieser Mann war es, der die Lichterscheinungen aus den allgemeinen Gesetzen der Mechanik erklärte, während die Arbeiten von *Young* und *Fresnel,* so hoch und geistreich sie auch angeschlagen werden müssen, doch mehr auf sinnreichen geometrischen Construktionen, als auf eigentlichen mechanischen Prinzipien beruhen. Diese beiden hochbegabten Forscher haben die Lichterscheinungen bestimmt, sind also mit *Keppler* zu vergleichen, *Cauchy* hat diese Erscheinungen erklärt, ist daher mit *Newton* zu vergleichen.

Wenn es also nach dem bisher Gesagten keinem Zweifel unterliegt, dass

die rationelle Physik von einer Hypothese ausgehen muss, so kann nur noch die Frage sein, von welcher Hypothese man heut zu Tage ausgehen soll. Um diese Frage zu beantworten, scheint es angemessen zu sein, die Geschichte der Hypothesen über die physikalische Natur der Substanzen in Kürze zu berühren.

GESCHICHTE DER HYPOTHESEN ÜBER DIE PHYSIKALISCHE NATUR DER SUBSTANZEN.

An Hypothesen über das Wesen der Substanzen hat es seit den frühesten Zeiten der Forschungen nicht gefehlt. Die Hellenen haben auch hier die ersten Schritte gethan. Sie sprechen bereits von Atomen (*Leuzippus*), von Architypen (*Epicur*), von den Elementen, Wasser, Feuer, Luft und Erde, nebst der Quintessenz (*Aristoteles*), aus welchen der Weltbau bestehe. Allein diese Vorstellungen sind, wenn auch geistreich und als die ersten Versuche hoch zu ehren, doch so unbestimmt, dass daraus mit Sicherheit durchaus keine Folgerung gezogen werden kann.

Die italischen Völker des Alterthums haben in den erklärenden Naturwissenschaften nie einen Versuch gemacht, und die für die Entwicklung der Kunst und insbesondere der Architektur so bedeutungsvolle Zeit des ganzen ersten und der Hälfte des zweiten Jahrtausends der christlichen Zeitrechnung ist hinsichtlich der erklärenden Naturwissenschaften ein wahres Vacuum, und erst gegen Ende des 17. Jahrhunderts treten mit *Boyle* und *Descartes* Bestrebungen hervor, über das Wesen der Stoffe zu klaren Anschauungen zu kommen.

Descartes betrachtet die Materie bestehend aus untheilbaren nicht schweren Atomen, die im bewegten Zustand Wechselwirkung auszuüben im Stande sind.

Boyle verwirft die Elemente des Aristoteles, spricht die Ansicht aus, dass man sich um die Urbestandtheile der Stoffe nicht kümmern, sondern vielmehr dahin trachten soll, die Bestandtheile kennen zu lernen, welche sich aus den Substanzen ausscheiden lassen, um zuletzt zu den nicht mehr zerlegbaren Bestandtheilen, d. h. zu den chemischen Elementen zu kommen. *Boyle* ist mithin der Begründer der empirischen oder inductiven Periode der Chemie.

Gegen Ende des 18. Jahrhunderts wird durch *Higgins*, *Richter*, insbesondere aber durch *Dalton* eine atomistische Anschauung über das Wesen der Substanzen aufgestellt. Aber erst 1808 hat *Dalton* seine Atomentheorie vollständig ausgesprochen. Die Grundgedanken dieser Theorie sind folgende.

Die Substanzen bestehen aus sehr kleinen untheilbaren kugelförmigen und schweren Körperchen oder Atomen. Die Atome einer und derselben Substanz sind gleich gross, gleich schwer und überhaupt von gleicher Beschaffenheit. Die Atome verschiedener Substanzen sind ungleich gross und ungleich schwer. Jedes Atom ist mit einer Wärmesphäre umgeben. Die chemische Verbindung ist eine innige Nebeneinanderlagerung, eine chemische Zerlegung eine Trennung von neben einander gelagerten Atomen. Chemisch zusammengesetzte Substanzen bestehen aus Gruppen von Atomen.

So spricht *Dalton*. Aber er spricht nicht von Kräften, welche die Nebeneinanderlagerung der Atome bewirken und sie in dieser Nebeneinanderlagerung erhalten, noch von Kräften, welche die Trennungen bewirken, sondern nach *Dalton* bestehen die Substanzen blos durch eine Juxtaposition der Atome, wobei jedes Atom die Anwesenheit jedes andern gänzlich ignorirt, oder die Substanzen sind nach *Dalton* ein Massensystem ohne Kräfte.

Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass *Dalton* als der Gründer der atomistischen Theorie angesehen werden muss; allein erst durch die genauere Bestimmung der Atomgewichte durch *Berzelius*, die Entdeckung des Isomorphismus und Dimorphismus durch *Mitscherlich*, so wie der Isomerie und Polymerie durch *Berzelius* gewann die atomistische Theorie von *Dalton* eine so feste Stütze, dass der Glaube an ihre Richtigkeit sich mehr und mehr befestigen konnte.

Die Philosophen, welche der Mechanik nie hold waren, haben in neuerer Zeit die atomistische Theorie verworfen und dafür eine andere an die Stelle gesetzt, welche sie dynamische Theorie genannt haben. Sie ist zuerst von *Kant* ausgesprochen, und dann von *Schelling* und *Hegel* vertheidigt und ausgebildet worden, rührt also von jenen Tiefdenkern her, welche für die Erkenntniss der innern Geisteswelt so ausserordentlich, für die Erkenntniss der Aussenwelt dagegen so unglücklich begabt waren. Nach dieser dynamischen Ansicht hat die Materie folgende Eigenschaften. Sie erfüllt mit Stetigkeit die kleinsten Räume der Körper, und ist bis in's Unendliche theilbar. Die chemischen Verbindungen entstehen durch eine wechselseitige und so vollständige Durchdringung der Stoffe, dass in der Verbindung nirgends eine Spur von den in Verbindung getretenen Substanzen zu finden ist. Die Materie ist mit anziehenden und abstossenden Kräften begabt, und durch das Spiel dieser Kräfte erfolgen die chemischen Erscheinungen. Diese dynamische Ansicht ist von den Naturforschern schon längst verlassen und heut zu Tage kann man die Naturforscher nur noch in zwei Klassen theilen, in solche die keine Ansicht haben und in solche, welche

sich der atomistischen Theorie anschliessen. Wir haben nun ferner die Ansichten der Mathematiker zu betrachten, welche sich in neuerer Zeit mit physikalischen Problemen beschäftigt haben. Auch hier treffen wir zwei Theorien, die Continuum- oder Contakt-Theorie und die atomistische Theorie. Erstere ist zuerst aus den scheinbaren Eigenschaften der tropfbaren Flüssigkeiten und Gase hervorgegangen und dann von *Navier* durch eine glücklich erdachte Modifikation auch auf feste elastische Körper anwendbar gemacht worden, letztere haben *Poisson, Cauchy* und *Lamé* ihren Untersuchungen zu Grunde gelegt.

Die Contakt-Theorie hat Aehnlichkeit mit der dynamischen Theorie der Philosophen, unterscheidet sich aber von dieser letzteren durch grössere Bestimmtheit. Nach derselben stellt man sich vor, dass die ihrem innern Wesen nach ganz unbekannte Materie den Raum eines Körpers stetig erfülle, dass sie aber dessen ungeachtet einer Ausdehnung und Zusammendrückung fähig sei; denkt sich ferner, dass die kleinsten Theile der Substanz von äusseren Kräften affizirt werden, und auch durch anziehende wie abstossende Kräfte gegen einander wirken, und nimmt endlich an, dass zwischen den unmittelbar in Contakt befindlichen Theilen der Materie wechselseitige Pressungen stattfinden, deren Richtungen gegen die Contaktfläche bei flüssigen Substanzen normal, bei weichen festen und elastischen Körpern hingegen von der normalen Richtung abweicht, also gegen die Contaktfläche schief ist. Worin die chemische Verbindung und Zerlegung besteht, wird in dieser Theorie nicht gesagt; sie gibt überhaupt über die innere Organisation der Substanzen gar keine Aufklärung, sondern beschreibt vielmehr nur, wie sich die Stoffe, insbesondere Flüssigkeiten und dichte Substanzen den Sinnen darstellen. Durch die mathematische Behandlung der Contakt-Theorie ist man zu sehr vielen, das Gleichgewicht und die Bewegung der festen und flüssigen Körper betreffenden Resultaten gekommen, welche mit den Thatsachen sehr gut zusammenstimmen; allein als Basis für die erklärenden Naturwissenschaften kann diese Vorstellung nicht gebraucht werden, denn die chemischen, so wie die physikalischen Erscheinungen des Lichtes, der Wärme, der Elektrizität und des Magnetismus können aus einem so inhaltsarmen Stoff nicht erklärt werden, und dies ist auch der Grund, weshalb diese Contakt-Theorie verlassen und zur atomistischen Theorie übergegangen wurde.

Poisson legt seinen Untersuchungen „sur l'équilibre et le mouvement des corps solides et des fluides," Journal de l'école polytechnique, cahier XX, p. 4, folgende Anschauung zu Grunde. Er sagt:

Alle Theile der Materie sind zweien Wechselwirkungen unterworfen. Die

eine derselben ist anziehend, unabhängig von der chemischen Natur der Stoffe, dem Produkt der sich anziehenden Massen direkt, dagegen dem Quadrat ihrer Entfernung verkehrt proportional. Dies ist die Schwerkraft. Die andere jener Wechselwirkungen ist je nach Umständen bald anziehend, bald abstossend, richtet sich ferner nach der Natur der Stofftheilchen und nach ihrem Wärmegehalt, und ihre Intensität nimmt mit der Entfernung der auf einander wirkenden Stofftheilchen so rasch ab, dass sie bei einer für die Sinne wahrnehmbaren Entfernung bereits verschwindet.

Die Körper bestehen aus getrennten Molekülen, d. h. aus schweren Körperchen von sehr geringer Ausdehnung, und sind durch leere Räume von einer für unsere Sinne unwahrnehmbaren Kleinheit von einander getrennt. Diese Moleküle sind so klein und so nahe neben einander, dass in einer für unsere Sinne kaum wahrnehmbaren Quantität eines Stoffes eine ausserordentlich grosse Anzahl von Molekülen enthalten sein kann.

Unabhängig von der ponderabeln Materie enthält jedes Molekül noch eine gewisse Quantität eines imponderabeln Stoffes, welchem man die Phänomene der Wärme zuschreibt. Diese Wärmesubstanz wird von der ponderabeln Materie jedes Moleküls angezogen und dadurch in den Molekülen zurückgehalten, theilweise entweicht sie jedoch durch Ausstrahlung, gelangt dabei an andere Moleküle und wird von diesen theilweise absorbirt, theilweise reflektirt, und durch diesen Vorgang kann der Wärmestoffgehalt constant bleiben oder eine Aenderung erleiden.

Da nach Versuchen von *Gay-Lussac* eine rasche Vergrösserung oder Verkleinerung eines leeren Raums weder in dem Raum selbst, noch in der Umgebung eine Aenderung der Wärme hervorbringt, während das Gegentheil eintritt, wenn in dem Raum eine geringe Quantität Luft oder Gas enthalten ist, so ist man zu der Folgerung berechtiget, dass die in einem luftleeren Raum enthaltene Menge von Wärmestoff verschwindend klein ist im Verhältniss zu der in einem von ponderabler Materie erfüllten Raum enthaltenen, dass folglich die Repulsivkraft, welche wir annehmen, nicht in den leeren Räumen zwischen den Molekülen, sondern in den Molekülen selbst ihren Sitz habe. Diese Räume zwischen den Molekülen mögen jedoch elektrisches oder magnetisches Fluidum enthalten; wir nehmen jedoch einen neutralen Zustand derselben an und berücksichtigen nur allein die Molekularkraft, welche aus der Anziehung der ponderabeln Materie und aus der Repulsion des Wärmestoffes entspringt.

In dem gleichen Mémoire findet man Seite 69 und 70 die Art und Weise

erklärt, wie die Moleküle in den unregelmässig und regelmässig kristallisirten, so wie auch in den flüssigen Substanzen gruppirt sind.

Diesem Medium, wie es sich *Poisson* vorstellt, fehlt es nicht an Inhalt; ja, es ist nur zu reich ausgestattet. Es enthält ponderable Materie, Wärmestoff, elektrisches und magnetisches Fluidum, und enthält auch einen Reichthum von attraktiven und repulsiven Kräften. Allein dies alles sind doch nur Worte, und man sieht nicht ein, wie die imponderabeln Stoffe durch ihr bloses Vorhandensein an dieser oder jener Stelle physikalische Wirkungen hervorzubringen vermögen. Hierüber geben auch die Memoiren von *Poisson*, welche die Wärme, Elektrizität und den Magnetismus speziell behandeln, keinen Aufschluss. Das Memoire, welchem die obigen Bekenntnisse *Poisson's* entnommen sind, wurde im Jahre 1831 publizirt. Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass *Poisson*, wenn er heute noch am Leben wäre, ganz andere Bekenntnisse aussprechen würde, und gewiss nicht mehr der Ansicht wäre, dass Stoffe durch ihr bloses Vorhandensein ohne Bewegung die Erscheinungen der Wärme, Elektrizität und des Magnetismus hervorbringen können.

Nun haben wir noch von den Anschauungen zu sprechen, welche *Cauchy* seinen vielfachen analytischen Untersuchungen über das Gleichgewicht und die Bewegung der Medien zu Grunde legt. Die Geschichte dieser Untersuchungen zerfällt in drei Abschnitte.

Der erste Abschnitt umfasst die Untersuchungen über das Gleichgewicht und die Bewegung eines den Raum continuirlich erfüllenden Mediums. Sie betreffen die tropfbaren und ausdehnsamen Flüssigkeiten, so wie die elastischen Körper. Diesen Untersuchungen ist die Contakt- oder Continua-Theorie, von welcher früher die Rede war, zu Grunde gelegt.

Der zweite Abschnitt behandelt das sogenannte einfache Medium, bestehend aus körperlichen Punkten, die durch leere Zwischenräume von einander getrennt sind, und durch anziehende, so wie durch abstossende Kräfte gegen einander wirken. Die Intensitäten dieser Kräfte sind Funktionen der Entfernungen und nehmen mit dem Wachsen der Entfernung sehr rasch ab. Einlässlicher spricht sich *Cauchy* nicht aus, er sagt gerade nur so viel, als nothwendig ist, um mit den analytischen Untersuchungen beginnen zu können, und überlässt es der Phantasie des Lesers, sich von diesem aus materiellen Kraftpunkten bestehenden Medium eine Vorstellung zu machen, und es mit den physikalischen Thatsachen zu vergleichen. Obgleich dieses einfache Medium so armselig ausgestattet ist, gelingt es dennoch diesem grossen Meister der Analysis, zu einer Fülle von Resultaten zu gelangen, welche nicht nur auf die

festen und flüssigen Körper anwendbar sind, sondern auch beinahe alle bisher beobachteten Lichterscheinungen auf eine in der That überraschende Weise zu erklären. Dieses findet theilweise seine Erklärung in dem Umstande, dass im Verlauf der Rechnung die Voraussetzungen, auf welchen sie beruht, nicht vollständig berücksichtigt werden.

In einem Medium, das nur aus materiellen Punkten besteht, die durch anziehende und abstossende Kräfte gegen einander wirken, kann es selbstverständlich keinen Gleichgewichtszustand geben, bei welchem nach verschiedenen Richtungen verschiedene Elastizitäten stattfinden, sondern im Gleichgewichtszustand eines solchen Mediums muss nothwendig nach allen Richtungen einerlei Elastizität vorhanden sein. Aus den Gleichgewichtsgleichungen (3) des „Mémoire sur la dispersion de la lumière" muss sich daher nothwendig nachweisen lassen, dass für das vorausgesetzte Medium nicht nur die Coeffizienten L, M, N, P, Q, R, Gleichung 22, Seite 9, verschwinden, sondern dass noch überdies zwischen den Coeffizienten L M N P Q R, Gleichung 20 und 21, Seite 9, die Beziehungen stattfinden:

$$P = Q = R$$
$$L = M = N = 3\,R$$

Dann aber gilt die ganze Untersuchung nur für ein nach allen Richtungen gleich elastisches, also nur für ein einfach brechendes Medium.

Der dritte Abschnitt von *Cauchy's* Untersuchungen behandelt ein sogenanntes Doppelmedium, bestehend aus materiellen Punkten, die durch Zwischenräume von einander getrennt sind. Diese sind aber nicht absolut leer, sondern sie enthalten ein zweites System von materiellen, von einander getrennten kleineren Punkten. Dies ist der Aether. Zwischen den Körper- und Aetherpunkten finden folgende Wechselwirkungen statt. Je zwei Körperpunkte ziehen sich an. Je zwei Aetherpunkte stossen sich ab. Körperpunkte und Aetherpunkte ziehen sich an. Diese Anziehungs- und Abstossungskräfte sind Funktionen der Entfernung und nehmen mit dem Wachsen der Entfernung äusserst rasch ab. In Folge dieser Kräfte ist die Gleichgewichtslagerung der Aetherpunkte zwischen den Körperpunkten nicht eine gleichförmig dichte, sondern diese Dichte ist in der Nähe der Körperpunkte gross und nimmt von da an gegen die Mitte zwischen zwei unmittelbar neben einander befindlichen Körperpunkten hin allmählig ab, so dass also ein Aetherarrangement mit periodisch wiederkehrender Dichte angenommen wird. *Cauchy* vernachlässigt die Bewegung, welche möglicher Weise in den Körperpunkten vorhanden sein kann, und untersucht nur den Bewe-

gungszustand des Aethermediums. Die Untersuchung ist jedoch noch nicht bis zum Abschluss gebracht. Die analytischen Schwierigkeiten übersteigen bei weitem diejenigen, welche bereits die Behandlung des einfachen Mediums verursachte; wenn aber diesem grossen Meister die Durchführung der Theorie dieses Doppelmediums so vollständig gelingen sollte, wie die des einfachen Mediums, so darf man gewiss sehr bedeutende Ergebnisse erwarten.

Wir sind hiermit am Schluss dieser Skizze über die Geschichte der Hypothesen, welche bis jetzt über die innere Beschaffenheit der Substanzen aufgestellt wurden, und gehen nun zur Erklärung derjenigen Hypothesen über, welche ich meinen folgenden Untersuchungen von sehr bescheidenem Inhalt und Umfang zu Grunde legen werde.

DAS DYNAMIDEN-SYSTEM.

Diesen Titel habe ich für das Medium gewählt, welches ich den später folgenden Untersuchungen zu Grunde lege. Es ist keine neue eigenthümliche Erfindung, auf die man ein Patent nehmen könnte, sondern ist vielmehr nur eine Combination der von *Dalton, Poisson* und *Cauchy* ausgesprochenen Ansichten. Bereits in meinen im Jahr 1852 erschienenen Prinzipien der Mechanik und des Maschinenbaues habe ich dieses Dynamidensystem, Seite 20 bis 41, jedoch ohne Titel, erklärt, und zwar blos in der Absicht, um mit aller Bestimmtheit sagen zu können, welche Arten von Kräften in der Natur vorkommen, von wo aus und nach wohin sie wirken und in welcher Weise im Allgemeinen ihre Wirksamkeit erfolgt, weil dies die ersten Fragen sind, die in den Prinzipien der Mechanik beantwortet werden müssen, und weil eine naturgemässe Beantwortung dieser Fragen nicht möglich ist, wenn man sich um den inneren Bau der Körper gar nicht kümmert.

Da wohl nur wenigen Lesern dieses Buches meine Prinzipien bekannt sein werden, so ist es nothwendig, dass ich die dort ausgesprochene Ansicht hier wiederhole; ich werde jedoch nicht abschreiben, sondern bald zusetzen, bald auslassen, wie es mir für den gegenwärtigen Zweck angemessen zu sein scheint.

Allgemeine Eigenschaften der Materie. Das Wesen der Materie ist uns nur theilweise bekannt. Wir wissen nur aus Erfahrung, dass sie gleichsam ein Doppelwesen ist, das mit einem passiven und mit einem aktiven Prinzip begabt ist. Das passive Prinzip wird Beharrungsvermögen genannt und besteht theils in

der Fähigkeit der Materie, durch sich selbst und ohne alle äussere Einwirkung in einem Zustand des ruhigen oder bewegten Seins verharren zu können, theils aber in der Unfähigkeit, durch sich selbst einen in ihr vorhandenen Zustand des ruhigen oder bewegten Seins zu verändern. Dieses Beharrungsvermögen könnte man auch die Fähigkeit der Selbsterhaltung des ruhigen oder des bewegten Seins der Materie nennen. Das zweite, nämlich das aktive Prinzip, wird Kraft genannt. Es besteht in der Fähigkeit der Körper, wechselseitig anziehend oder abstossend einzuwirken, und dadurch die Zustände ihres Seins verändern zu können. Dieses aktive Prinzip könnte man auch das Prinzip der Wechselwirkungsfähigkeit der Stoffe nennen, wodurch das ruhige oder bewegte Sein der Körper verändert wird. Diese beiden Prinzipe der Selbsterhaltungsfähigkeit des Seins und der Wechselwirkungsfähigkeit sind die uns bekannten Fundamentaleigenschaften der Materie.

Unmittelbare Aeusserung der Kräfte. Messung derselben. Die Existenz der Kräfte erkennen wir an den mannigfaltigen Wirkungen, welche sie hervorbringen, und insbesondere durch das Gefühl und Bewusstsein von unseren eigenen Kräften. Dieses Gefühl haben wir durch einen besonderen Sinn, den man Tastsinn nennt, aber besser Kraftsinn nennen könnte. Ohne diesen Sinn würden wir von der Existenz der Kraft durchaus keine Ahnung haben, die Welt mit ihren Erscheinungen würde uns als eine reine Phantasmagorie erscheinen (wie sie in der That denjenigen Physikern und Philosophen erscheint, welche die ersten Prinzipien der Mechanik nie erlernt haben). Die Ursachen dieser Erscheinungen aufzusuchen, würde uns wohl schwerlich in den Sinn kommen, und wenn es auch der Fall wäre, jedenfalls nicht gelingen. Wir empfinden die Existenz unserer eigenen Kraft, wenn wir einen Zug oder Druck ausüben (Wechselwirkung). Wir wissen aus der Erfahrung, dass durch andauernde Thätigkeit eines solchen Zuges oder Druckes Bewegungen und Bewegungsänderungen hervorgebracht werden, und schliessen nun daraus, dass jede Kraft (Wechselwirkung) in einem Zug oder Druck, in einer Attraktion oder Repulsion besteht, und dass jede Bewegung und Bewegungsveränderung nur in Folge einer andauernden Zug- oder Druckäusserung irgend einer Kraft entstehen könne. Diese unmittelbaren Kraftäusserungen können nach ihrer Intensität bestimmt, d. h. gemessen werden. Als Einheit der Kräfte kann man irgend einen Zug oder Druck annehmen, z. B. jenen, den ein Körper, dessen Gewicht gleich 1 Kilogramm beträgt, auf eine Unterlage ausübt. Die Intensität einer Kraft ist dann gleich 2, 3, 4.... zu

setzen, wenn sie, auf einen Körper von 2, 3, 4 Kilogramm Gewicht nach vertikaler Richtung aufwärts wirkend im Stande ist, das Fallen des Körpers zu verhindern, und diese Messung der Kräfte gilt sowohl für die Statik, als auch für die Dynamik.

Masse und Bestimmung ihrer Quantität. Die Masse eines Körpers ist die Menge dessen, was sich selbst nicht bewegen, sich selbst nicht treiben kann, was also bewegt oder getrieben werden muss, wenn ein Körper aus dem Zustand der Ruhe in jenen der Bewegung, oder aus einem gewissen Bewegungszustand in einen anderen übergehen soll.

Die Massen zweier Körper sind gleich gross, wenn sie, von gleich intensiven Kräften und auf gleiche Weise getrieben, ganz identische Bewegungen machen. Werden zwei oder mehrere Körper, von welchen man erkannt hat, dass sie gleiche Massen haben, vereinigt, so erhält man einen Körper, dessen Gesammtmasse 2, 3, 4 mal so gross ist, als die Masse jedes einzelnen der vereinigten Körper. Auf diese Weise können die Massen aller Körper und selbst auch der unwägbaren absolut richtig gemessen werden. Diese grundsätzlich einzig richtige Messungsart der Massen lässt sich jedoch sehr schwer praktisch durchführen, und es ist bei wägbaren Körpern zweckmässiger, ihre Masse durch den Quotienten aus dem Gewicht des Körpers an einem bestimmten Ort der Erde, und aus der Geschwindigkeitsänderung in jeder Sekunde beim Fallen des Körpers gegen die Erde an jenen Ort, wo sein Gewicht gemessen wurde, zu bestimmen.

Bewegung einer Masse M durch eine constante Kraft K. Wenn eine constante Kraft K, also ein constanter Druck, immer nach der gleichen Richtung durch eine gewisse Zeit auf eine Masse M einwirkt, die anfänglich in Ruhe war, so tritt in derselben eine Geschwindigkeit V ein, die der Intensität K der Kraft und der Dauer T ihrer Einwirkung direkt, der Grösse der Masse hingegen verkehrt proportional ist. Man hat daher:

$$V = \mathfrak{A} \frac{KT}{M}$$

wobei die Constante $\mathfrak{A}$ die Geschwindigkeit ausdrückt, die in einer Masseneinheit eintritt, wenn auf dieselbe eine Krafteinheit durch eine Zeiteinheit treibend einwirkt.

Dieses Gesetz ist ein Erfahrungsgesetz.

Die Körperatome des Dynamidensystems. Zur Beantwortung der Fragen, welche heut zu Tage die Physik und Chemie vorlegt, brauchen wir nicht zu wissen, ob es in der Natur absolut untheilbare Atome gibt, sondern es genügt für diesen Zweck zu wissen, dass diejenigen Substanzen, welche die Chemiker einfache Stoffe nennen, aus kleinen Körperchen oder aus Systemen von kleinen Körperchen bestehen, die sich bei allen chemischen und physikalischen Vorgängen wie untheilbare Einheiten verhalten. Ich nenne sie Körperatome, und wir werden bei wissenschaftlichen Betrachtungen, die sich auf Erscheinungen beziehen, bei welchen diese Atome selbst keinerlei Veränderungen erleiden, zu ganz richtigen Folgerungen gelangen, wenn wir diese Atome so behandeln, wie wenn sie absolut untheilbar wären, wie dies der Fall ist bei den Problemen der Astronomie, wo die Planeten auch als untheilbare Körpereinheiten in Rechnung gebracht werden. Solcher Körperatome gibt es so viele Arten, als es chemisch-einfache Stoffe gibt, mithin 61.

Die Gruppirungsweise der uns ihrem innern Wesen nach ganz unbekannten Materie in den Körperatomen kann sehr mannigfaltig, regelmässig oder unregelmässig sein. In kristallisirten Stoffen ist sie eine symmetrische in Bezug auf drei auf einander senkrecht stehende oder gegen einander geneigte Axen.

Die Atome sind so klein, dass in einer für unsere Sinne verschwindend kleinen Stoffmenge eine ungemein grosse Anzahl enthalten sein kann.

Die Körperatome sind träge, zugleich aber mit Kräften ausgerüstet, durch welche sie zwar nicht auf sich selbst, wohl aber auf andere Atome anziehend einwirken können. Es kann sich demnach kein Atom durch die demselben inwohnenden Kräfte in Bewegung bringen, oder aus einem vorhandenen Bewegungszustand in einen andern versetzen; jedes Atom besitzt jedoch die Fähigkeit, in einem Zustand des ruhigen oder des bewegten Seins zu verharren, und gleichzeitig durch seine Kräfte auf andere Atome anziehend einzuwirken.

Die Körperatome sind schwer, haben ein Gewicht. Das absolute Gewicht derselben ist nicht bekannt. Die Aequivalentzahlen der Chemiker drücken jedoch die Verhältnisse der absoluten Gewichte der Atome der einfachen Körper aus.

Der Aether. Die Körpersubstanzen enthalten nebst den trägen und schweren Körperatomen noch den ebenfalls aus Atomen bestehenden Aether. Die Aetheratome sind ebenfalls träge, aber nicht schwer; sie sind so klein

im Verhältniss zu den Körperatomen und zu den Entfernungen der Aetheratome, dass ihre Gestalt nicht in Betrachtung kommt, dass also alle Wirkungen der Aetheratome so erfolgen, wie wenn in dem Mittelpunkte ihrer Masse die Masse und die Kräfte vereinigt wären. Zwischen den Aetheratomen findet Abstossung, zwischen Körperatomen und Aetheratomen Anziehung statt.

Wechselwirkung zweier Atome. Hinsichtlich der Wechselwirkung zweier Atome irgend einer Art gelten folgende Sätze:

1. Das attraktive oder repulsive Prinzip, mit welchem ein Atom A begabt ist, kann nicht auf seine eigene Masse, sondern immer nur auf die Masse eines anderen Atoms B bewegend einwirken.

2. Die Wirkung zweier Atome A und B ist wechselseitig. Die Kraft von A wirkt auf die Masse von B und die Kraft von B auf die Masse von A.

3. Die unmittelbare Aeusserung einer Atomkraft besteht entweder in einer Anziehung, welche eine Annäherung, oder in einer Abstossung, welche eine Entfernung der Atome hervorzubringen strebt.

4. Ist die Entfernung zweier Atome sehr gross im Verhältniss zu ihren Abmessungen, so ist es erlaubt, anzunehmen, dass die Richtung der wechselseitigen Anziehung oder Abstossung in die Verbindungslinie der Massenmittelpunkte der Atome fällt.

5. Ist dagegen die Entfernung zweier Atome im Verhältniss zu ihren Abmessungen nicht gross, so muss die Wechselwirkung der Atome nach den Methoden berechnet werden, die bei Anziehungen von Körpern von endlicher Gestalt angewendet werden, und dabei kann man sich erlauben, anzunehmen, dass die Masse jedes Atoms in dem Raum desselben gleichförmig und continuirlich vertheilt ist. Bei so nah gestellten Atomen besteht die Wechselwirkung nicht immer blos in einem Bestreben, die Atome einander zu nähern oder von einander zu entfernen, sondern zuweilen auch in einem Bestreben, die gegenseitige Lage der Atome zu ändern oder Drehungen in denselben hervorzubringen.

6. Die Intensitäten der Wechselwirkungen sind gleich gross, und richten sich nach der Entfernung, Gestalt, Lage und materiellen Beschaffenheit der Atome.

7. Ist die Entfernung der Atome sehr gross im Verhältniss zu ihren Abmessungen, so ist die Intensität der Wechselwirkung dem Produkt der

Massen der Atome und einer gewissen Funktion der Entfernung der Massenmittelpunkte der Atome proportional.

8. Die Wechselwirkung zweier Atome ist im bewegten Zustand so gross als im ruhenden.

Die Atomkräfte. In den Körper- und Aetheratomen sind folgende Kräfte wirksam:

1. Die allgemeine Schwere. Vermöge dieser Kraft ziehen sich je zwei Körperatome mit einer Intensität an, die von der materiellen Natur derselben unabhängig ist, dagegen dem Produkt der Atommassen direkt, und dem Quadrat ihrer Entfernung verkehrt proportional ist. Zwischen den Aetheratomen, so wie auch zwischen Aether- und Körperatomen ist diese Schwere nicht wirksam.

2. Die physikalische Anziehung. Mit diesem Worte will ich diejenige Kraft bezeichnen, vermöge welcher sich zwei identische Körperatome mit einer Itensität anziehen, welche dem Produkt ihrer Massen direkt proportional ist, und bei zunehmender Entfernung der Atome sehr rasch und nicht nach dem verkehrt quadratischen Gesetz abnimmt. Diese Anziehung ist überdies auch von der chemischen Beschaffenheit der Atome abhängig.

3. Die chemische Anziehung oder Affinität. Das ist die Kraft, mit welcher sich zwei heterogene Körperatome anziehen. Sie ist wesentlich abhängig von der chemischen Beschaffenheit der Atome, ist dem Produkt ihrer Massen proportional und nimmt mit dem Wachsen der Entfernung der Atome sehr rasch ab.

4. Die Aetherkräfte. Zwischen Aetheratomen findet Abstossung, zwischen Körper- und Aetheratomen Anziehung statt. Letztere ist von der chemischen Natur des Körperatoms abhängig. Auch diese Wechselwirkungen sind dem Produkt der Atommassen proportional und richten sich nach der Entfernung der Atome in der Weise, dass sie sehr rasch abnehmen, wenn die Entfernung der Atome zunimmt.

Die Dynamiden. Vermöge der wechselseitigen Abstossung der nicht schweren Aetheratome verbreitet sich der Aether in dem ganzen unendlichen Raum, durchdringt auch alle Körper, wird aber um die Körperatome herum durch ihre Anziehungen gegen die Aetheratome mehr oder weniger concentrirt, und hierdurch entsteht in den Räumen zwischen den Körperatomen und um diese herum eine Gruppirungsweise des Aethers, welche sich richtet

1) nach der Gestalt, Stellung und Gruppirung der Körperatome; 2) nach der mittleren Dichte des Aethers im Universum; 3) nach dem Verhältniss zwischen den Intensitäten der Abstossungskraft zwischen Aether und Aetheratomen und der Anziehungskraft zwischen Körper und Körperatomen. Nach diesem Verhältniss sind insbesondere zweierlei Gleichgewichtsgruppirungen möglich. Wenn wir annehmen 1) dass die Entfernung der Körperatome gegen ihre Abmessungen sehr gross ist; 2) dass die Intensität der Anziehung zwischen Körper- und Aetheratomen sehr gross ist im Verhältniss zur Abstossung zwischen den Aetheratomen; 3) dass die Anzahl der in einer bestimmten Quantität einer Substanz enthaltenen Aetheratome vielmal, z. B. Millionen mal grösser ist, als die Anzahl der Körperatome, so ist klar, dass sich der Aether atmosphärenartig um die Körperatome lagern wird, und dass jede solche Atmosphäre eine ganz bestimmte Form und Begrenzung haben wird, so zwar, dass der Raum zwischen je zwei Körperatomen grösstentheils ganz leer sein wird. Auch ist klar, dass die Dichte der Nebeneinanderlagerung der Aetheratome innerhalb einer solchen Hülle oder Atmosphäre an der Oberfläche der Körperatome gross und gegen die äussere Grenze der Hülle hin allmählig kleiner und kleiner sein wird.

Wir wollen ein Körperatom mit der dasselbe umgebenden Aetherhülle eine Dynamide nennen, um damit auszudrücken, dass es ein Ganzes ist, in welchem Alles enthalten ist, was zur Hervorbringung von mannigfaltigen dynamischen Erfolgen gehört. Ich nenne ferner eine Substanz, die durch die Gleichgewichtslagerung solcher Dynamiden besteht, ein Dynamidensystem. Fig. 1 ist eine bildliche Darstellung einer Dynamide. Der Gleichgewichtszustand eines solchen Dynamidensystems wäre vollständig bekannt, wenn man im Stande wäre, zu bestimmen: 1) die Positionen der Schwerpunkte der Körperatome; 2) die Lage (Axenrichtung) jedes Körperatoms; 3) die Gleichgewichtsgruppirung des Aethers in jeder Hülle.

Sind die Atome genau oder annähernd kugelförmig, oder sind sie nach dem hexaederschen Axensystem gestaltet, so entsteht eine Gleichgewichtsgruppirung, bei welcher um jedes Körperatom herum nach allen Richtungen einerlei Elastizität stattfindet. Fig. 2 gibt eine Anschauung von einem solchen isotropen System.

Ist hingegen jedes Atom nach drei gegen einander senkrecht oder schief stehenden Axen symmetrisch gestaltet, hat also jedes Atom nach *Mohs*'scher Terminologie die Form eines Rhomboeders, einer geraden ungleichkantigen oder einer schiefen ungleichkantigen Pyramide, so entsteht eine Gruppi-

rungsweise, bei welcher um jedes Atom herum nach verschiedenen Richtungen verschiedene Elastizitäten stattfinden. Fig. 3 gibt eine Anschauung von einem solchen anisotropen System.

Der dynamische Zustand eines Dynamidensystems wäre bekannt, wenn man im Stande wäre, zu bestimmen: 1) die Bewegungen der Schwerpunkte der Körperatome; 2) die drehenden Bewegungen der Körperatome um ihre Schwerpunkte; 3) die relative Bewegung des Aethers der Hüllen gegen die Oberflächen der Körperatome. Das Dynamidensystem setzt eine grosse Entfernung der Körperatome und eine sehr energische Anziehung zwischen Körper- und Aetheratomen voraus. Nehmen wir nun im Gegentheil an, die Entfernung der Körperatome sei klein und die Anziehung zwischen Körperatomen und Aetheratomen sei schwach, so ist klar, dass sich ein eigentliches Dynamidensystem nicht bilden wird, sondern dass sich der Aether in den Räumen zwischen den Körperatomen verbreiten und eine Gruppirungsweise annehmen wird, bei welcher die Dichte der Nebeneinanderlagerung längs einer Linie, die durch die Schwerpunkte einer Reihe von Körperatomen geht, periodisch veränderlich sein wird. Es entsteht also unter diesen Voraussetzungen ein Medium ähnlich demjenigen, das *Cauchy* seinen neueren Untersuchungen zu Grunde gelegt und Doppelmedium genannt hat. Fig. 4 und 5 geben Anschauungen von diesem Medium. Das Dynamidensystem entspricht wahrscheinlich den tropfbaren Flüssigkeiten, Gasen und Dämpfen und denjenigen festen Substanzen, deren Körperatome gegen den Aether eine sehr energische Anziehung ausüben. Das Doppelmedium mit periodisch gruppirtem Aether entspricht dagegen mehr den festen Substanzen, deren Körperatome die Aetheratome nur mit schwacher Kraft anziehen. Theoretisch betrachtet ist jedoch das erstere dieser Systeme nur ein spezieller Fall von dem letzteren. Eine strenge mathematische Theorie des periodischen Systems würde auch die Theorie des Dynamidensystems in sich schliessen, aber nicht umgekehrt. Das periodische System verdient also für eine mathematische Behandlung den Vorzug, allein es verursacht Schwierigkeiten, die meine Kräfte weit übersteigen, und deshalb habe ich für meine Untersuchungen das Dynamidensystem gewählt, das ja doch auch wahrscheinlich in den meisten Fällen der Natur der Substanzen wenigstens annähernd entspricht.

Das Molekül oder die zusammengesetzte Dynamide. Das Molekül ist eine Gleichgewichtsgruppe von zwei oder mehreren ungleichartigen Körperatomen mit der dieselbe gemeinschaftlich umschliessenden Aetherhülle, und ist das

Produkt eines chemischen Prozesses. Der Chemismus im engeren Sinne des Wortes spricht sich in der Bildung des Moleküls aus. Es ist das wahre chemische Gebilde, denn die chemischen Eigenschaften eines Stoffes sind von der Gesammtmenge desselben, von dem Aggregatzustand und überhaupt von der Nebeneinanderlagerung der Moleküle ganz unabhängig und richten sich wesentlich nur nach dem Inhalt der Moleküle und nach der Gruppirungsweise der Atome in denselben.

Aber so wie einzelne Atome zu einer Gleichgewichtsgruppe A zusammentreten können, so können sich auch zwei oder mehrere gleichartige oder ungleichartige Moleküle abermals vereinigen, und daraus entstehen zusammengesetzte Moleküle B. Wiederholt sich dieser Prozess neuerdings, so entstehen Moleküle C von einer noch höheren Zusammensetzung.

Die Grundform eines einfachen Moleküls richtet sich theils nach der Anzahl, theils nach der Lagerung der Atome. Zwei Atome bilden ein stabförmiges Molekül, drei Atome eine dreieckige Platte, vier Atome ein tetraedrisches Molekül. Aehnlich verhalten sich auch die Grundformen der zusammengesetzten Moleküle. Die Stabilität des Gleichgewichtszustandes der Atome in einem einfachen Molekül richtet sich nach der Anzahl der Atome, nach der Grundgestalt derselben, nach der Intensität der chemischen Anziehung, nach der gegenseitigen Lage der Schwerpunkte der Atome, endlich nach der Stellung der Axen der Atome. Im Allgemeinen darf man wohl sagen, dass die Stabilität des Gleichgewichtes bei einer kleineren Anzahl von Atomen, die sich sehr energisch anziehen, sehr gross, bei einer grösseren Anzahl von Atomen, die sich nur schwach anziehen, klein sein wird. Aehnliches gilt auch hinsichtlich der Stabilität zusammengesetzter Moleküle.

Es ist wohl leicht einzusehen, obgleich durch Rechnung unendlich schwierig nachzuweisen, dass es im Allgemeinen mehr als eine einzige Gegeneinanderlagerung der Atome geben kann, bei welcher die sämmtlichen Kräfte den Bedingungen eines stabilen Gleichgewichtes entsprechen. Aus den gleichen Atomen können daher Moleküle verschiedener Art entstehen, die ihrem Stoffgehalt nach identisch sind und sich nur durch die Gruppirungsweise der Atome in den Molekülen unterscheiden. Dies sind die isomeren Stoffe.

Die Anzahl der möglichen Gleichgewichtsgruppirungen richtet sich theils nach der Anzahl der Atome, theils nach ihrer Grundgestalt. Einaxige Grundgestalten werden nicht so viele Gleichgewichtslagerungen zulassen als zwei- oder dreiaxige. Bei einer kleinen Anzahl von Atomen werden nicht so viele Gleichgewichtslagerungen möglich sein, als bei einer grösseren.

3.

Denkt man sich, dass aus einem Molekül A ein nach einem gewissen Axensystem gebildetes Atom a herausgenommen, und dafür ein aus einem anderen Stoff bestehendes, aber nach einem ähnlichen Axensystem gebildetes Atom b an die Stelle gesetzt wird, so entsteht ein neues Molekül B von derselben Grundform wie A, und die Kristallformen der Substanzen, welche A und B enthalten, werden übereinstimmen. Es sind also identische Kristallformen bei verschiedenem Stoffgehalt möglich. Dies ist die Isomorphie.

Zusammengesetzte Dynamiden sind in derselben Weise wie einfache in Rechnung zu bringen.

Wenn es unentschieden bleiben soll, ob eine Dynamide nur ein Atom oder ein einfaches Molekül oder endlich ein zusammengesetztes Molekül enthält, so werde ich in der Folge den ponderabeln Inhalt einer Dynamide mit dem Wort Kern bezeichnen.

Wechselwirkung zweier Dynamiden. Denkt man sich zwei Dynamiden A und B in einer gewissen Entfernung neben einander und gegen einander gestellt, so wirkt jede derselben mit einer Fülle von Kräften gegen die andere ein. Um die Totalität dieser Kräfte bestimmen zu können, erlauben wir uns anzunehmen, dass die Masse jedes Körperatoms den Raum desselben mit Stetigkeit erfüllt. Unter dieser Voraussetzung wirkt die Dynamide A gegen die Dynamide B mit folgenden Kräften ein:

1. Die in jedem unendlich kleinen Volumtheilchen des Körperatoms von A enthaltene Materie zieht die in jedem unendlich kleinen Volumtheilchen des Körperatoms von B enthaltene Masse an.

2. Die in jedem unendlich kleinen Volumtheilchen des Körperatoms von A enthaltene Materie zieht jedes Aetheratom der Hülle von B an.

3. Jedes Aetheratom der Hülle von A zieht jedes unendlich kleine Massentheilchen des Körperatoms von B an.

4. Jedes Aetheratom der Hülle von A stösst jedes Aetheratom von B ab.

Dieses reiche Kräftesystem, mit welchem eine Dynamide A gegen eine Dynamide B einwirkt, ist in Fig. 6 bildlich dargestellt. Die Totalwirkung ist natürlich abhängig 1) von der Entfernung der Schwerpunkte der Körperatome der Dynamiden; 2) von der Gestalt und dem Axensystem der Dynamiden; 3) von der Lage der Schwerpunktslinien gegen die Richtung der Axen der Körperatomgestalten.

Bewegungszustände eines Dynamidensystems. Das Dynamidensystem besteht nicht in einem blosen inaktiven Nebeneinandergestelltsein der Körper-

und Aetheratome, in einer blosen Juxtaposition der Atome ohne Wechselwirkungen zwischen denselben, sondern das ruhige Bestehen eines solchen Dynamidensystems beruht auf einem stabilen Gleichgewichtszustand, in welchem jedes Atom seinen Ort und seine Lage in der Art zu behaupten strebt, dass eine gewisse Kraftäusserung nothwendig ist, um es aus seiner Position zu verschieben oder von seiner Lage abzulenken, und dass es wiederum mit einer gewissen Energie in seine Gleichgewichtslagerung zurückzukehren strebt, so wie die äussere Kraft beseitigt wird. Dieser Gleichgewichtszustand ist also mit dem einer gespannten Saite zu vergleichen. Wird dieser Gleichgewichtszustand gestört, so können möglicher Weise sehr verschiedene Bewegungszustände eintreten. Durch eine sehr heftige äussere Einwirkung kann der stabile Gleichgewichtszustand gänzlich aufgehoben werden, und dann entstehen Durcheinanderwirbelungen und Fluthungen der Atome, Auflösungen der Dynamiden und Moleküle, und dieser tumultuarische Zustand dauert so lange fort, bis sich entweder wiederum der anfänglich vorhanden gewesene oder ein anderer Gleichgewichtszustand bildet, in welchem vielleicht ganz neue Atomgruppirungen vorhanden sind. Von derlei heftigen Bewegungen sind die chemischen Prozesse, insbesondere die Verbrennungsprozesse, ferner Gasexplosionen, elektrische Entladungen u. s. w. begleitet. Durch minder heftige äussere Einwirkungen wird dagegen der stabile Gleichgewichtszustand nicht gänzlich aufgehoben, und die Atome gerathen dann nur in gewisse Bewegungen um ihre stabilen Gleichgewichtspositionen, und diese Bewegungszustände sind es, welche wir nun näher in's Auge fassen wollen.

Die Bewegungsweisen, welche in den Körper- und Aetheratomen der Dynamiden eintreten, richten sich theils nach der Art der äusseren Einwirkung, theils nach der inneren Constitution des Dynamidensystems. Möglicher Weise können in den Kernen und in den Hüllen verschiedene Elementarbewegungen oder Zusammensetzungen aus denselben eintreten. Die Elementarbewegungen der Kerne können sein: 1) geradlinige oder krummlinige Hin- und Herschwingungen der Schwerpunkte; 2) continuirlich kreislinige oder krummlinige Bewegungen der Schwerpunkte; 3) continuirliche Rotationen der Kerne um freie Axen ihrer Gestalten, d. h. um Axen, in Bezug auf welche sich die Centrifugalkräfte das Gleichgewicht halten; 4) drehende Schwingungen der Kerne um gewisse Axen, ähnlich den Schwingungen einer Magnetnadel oder einer Unruhe.

Die Elementarschwingungen der Aetheratome in den Hüllen können dagegen sein: 1) radiale Schwingungen der Aetheratome, wobei sich die Hüllen abwechselnd ausdehnen und zusammenziehen; 2) continuirlich rotirende

Schwingungen der Aetherhüllen um die Kerne oder mit den Kernen; 3) drehende Hin- und Herschwingungen der Hüllen mit den Kernen oder gegen die Kerne.

Aber in den meisten Fällen wird nicht blos eine oder die andere dieser Elementarschwingungen isolirt auftreten, sondern es werden zwei oder mehrere und unter gewissen Umständen sogar alle sieben Elementarschwingungen gleichzeitig eintreten.

Da wir voraussetzen, dass die Masse eines Aetheratoms und selbst die Masse aller Aetheratome einer Hülle verschwindend klein ist gegen die Masse eines Körperatoms, und dass ferner die Intensitäten der zwischen den Aetheratomen abstossend, zwischen den Aether- und Körperatomen anziehend wirkenden Kräfte verhältnissmässig sehr gross sind, so werden die Bewegungen der Aetheratome nothwendig bei weitem schneller erfolgen können als jene der Körperatome.

Den Vorgang, durch welchen in den Dynamiden die beschriebenen Elementarbewegungen hervorgerufen werden, nenne ich eine Wellenbewegung. Denken wir uns zur Erklärung einer solchen Bewegung ein lineares Dynamidensystem, d. h. eine geradlinige Reihe A B C … Z von Dynamiden. Nehmen wir an, dass gegen A ein Stoss ausgeübt werde, so wird in dem Augenblick, wenn A seine Bewegung beginnt, das Gleichgewicht zwischen A und B gestört; die Dynamide B kommt dadurch ebenfalls in Bewegung, was zur Folge hat, dass das Gleichgewicht zwischen B und C gestört wird, demnach eine Bewegung auch in C angeregt wird, und so pflanzt sich die Bewegung durch die ganze Dynamidenreihe fort, indem jede Dynamide die Bewegung der vorhergehenden nachahmt. Der wirkliche Vorgang ist jedoch nicht so einfach als so eben beschrieben wurde; denn so wie A seine Bewegung beginnt, wird nicht nur B, sondern auch C D… zur Bewegung angeregt, und es ruft überhaupt die Bewegung eines Atoms in allen übrigen Bewegungen hervor, so dass also streng genommen die sich fortpflanzende Bewegung aus unendlich vielen Elementarschwingungen besteht. Darin liegt der Grund des farbigen Lichtes und der Dispersion. Die sich fortpflanzende Bewegung wird nur eine einzige einfache Elementarschwingung sein, wenn jede Dynamide nur auf die unmittelbar vor ihr befindliche Dynamide, und nicht zugleich auf die ferner stehenden einwirkt, und dann würde eine Dispersion nicht eintreten können. Verfolgt man diese Andeutungen, so wird man auch leicht die Ursache des Farbenzerstreuungsvermögens verschiedener Stoffe, so wie eine Beziehung zwischen diesem Zerstreuungsvermögen und dem Radius der Wirkungssphäre einer Dynamide errathen.

Wenn wir aber einstweilen von diesen dynamischen Feinheiten absehen, so erfolgt die Fortpflanzung der Bewegung durch eine Dynamidenreihe ähnlich wie ein Stoss durch eine Reihe von Elfenbeinkugeln, und so wie jede Kugel nicht die totale lebendige Kraft, welche sie empfängt, an die nächstfolgende abgibt, so ist dies auch bei den Dynamiden der Fall. Wenn also durch einen auf die erste Dynamide ausgeübten Schlag eine Welle durch die ganze Dynamidenreihe durchgejagt worden ist, so werden die Dynamiden nicht absolut ruhig sein, sondern es wird in jeder derselben eine gewisse lebendige Kraft und mithin eine gewisse Bewegung zurückgeblieben sein, und diese restirenden Bewegungen sind in den verschiedenen Dynamiden der Reihe nicht gleich gross, sondern nehmen von A bis Z hin ab. Nehmen wir z. B. an, jede Dynamide gebe 0·9 von der empfangenen lebendigen Kraft an die nächstfolgende ab, und bezeichnen wir die der ersten Dynamide mitgetheilte lebendige Kraft mit 1, setzen ferner $0{\cdot}9 = \epsilon$, so sind die nach einem Wellendurchgang restirenden lebendigen Kräfte:

in	A	B	C	D	E
	$1(1-\epsilon)$	$1\epsilon(1-\epsilon)$	$1\epsilon^2(1-\epsilon)$	$1\epsilon^3(1-\epsilon)$	$1\epsilon^4(1-\epsilon)$

Wird gegen die erste Dynamide nicht nur Ein Schlag ausgeübt, sondern wird die Dynamide A ununterbrochen in einem gewissen Bewegungszustand erhalten, so wird in der Dynamidenreihe zuletzt ein gewisser Beharrungszustand eintreten, in welchem die Bewegungszustände von A an nach Z hin nach einem gewissen Gesetz abnehmen.

Da bei einer Wellenfortpflanzung jede Dynamide die Bewegung der vorhergehenden ungefähr nachahmt, so werden sich die Bewegungsweisen der restirenden Bewegungen vorzugsweise nach der Bewegungsweise richten, die in der ersten Dynamide hervorgerufen wird.

Auf diesen restirenden Bewegungen, welche durch Wellen und Ströme in den Aetherhüllen hervorgerufen werden, beruhen nach meiner Ansicht die sogenannten Leitungserscheinungen. Für einen guten Leiter ist ϵ gross, für einen schlechten Leiter ist es klein.

Der physikalische Zustand einer Dynamide wird ferner nach meiner Ansicht durch die in derselben und insbesondere durch die in der Aetherhülle herrschende Bewegungsweise bestimmt. Im ruhigen Zustand des Aethers ist eine Dynamide weder warm, noch elektrisch, noch magnetisch; im bewegten Zustand treten dagegen die Erscheinungen der Wärme, Elektrizität und des Magnetismus auf. Da die Wärmeerscheinungen mit, die elektrischen und magnetischen hingegen

ohne merkliche Volumsänderungen verbunden sind, so vermuthe ich, dass die Wärmeerscheinungen auf Radialschwingungen, d. h. auf solchen Schwingungen beruhen, welche Ausdehnungen der Aetherhüllen zur Folge haben, wodurch die Repulsivkraft der Aetherhüllen gesteigert und mithin eine Ausdehnung des Körpers hervorgebracht wird. Ich vermuthe dann ferner, dass die continuirlich rotirende Bewegung der Aetherhüllen dem elektrischen Strom entspricht, und dass durch diese rotirende Bewegung der Dynamiden in Verbindung mit der drehenden Bewegung der Erde die Drehungsaxe der Dynamide parallel mit der Erdaxe gestellt wird, ähnlich wie bei dem bekannten von *Foucault* zuerst angestellten Versuch mit dem Bohnenberger'schen Maschinchen. Dass hierauf die Erscheinung des Magnetismus beruhen könnte, wage ich auszusprechen. Allein die hin- und herschwingenden Bewegungen der Aetherhüllen vermag ich nicht zu deuten. Die physikalische Bedeutung der Körperschwingungen ist bekannt.

Sehr merkwürdig sind diejenigen Vorgänge, welche ich dynamische Metamorphosen oder Bewegungsumwandlungen nennen will. So wie nämlich in den Maschinen durch die geometrisch-mechanische Gliederung ihrer Bestandtheile jede Bewegungsart in jede andere, also ein geradliniger Hin- und Hergang in eine continuirliche Drehung und umgekehrt, oder eine continuirliche Drehung in eine Hin- und Herdrehung umgewandelt werden kann, eben so können auch durch geeignete Einwirkungen die freien Bewegungen der Atome in den Körpern in einander übergeleitet werden. Es können aus Schwingungen der Körperatome Aetherschwingungen, und aus Aetherschwingungen gewisser Art Aetherschwingungen anderer Art hervorgehen; oder es kann durch rein mechanische Einwirkungen Wärme, Licht, Elektrizität, aus Wärme Licht und Elektrizität entstehen, wovon jedes Gewitter ein schlagendes Beispiel liefert. Ich gestehe offen, dass es mir vorkommt, als wäre uns durch diese Vorgänge ein merkwürdiges Geheimniss der Natur aufgedeckt, und angedeutet, wie bewunderungswürdig einfach die Mittel sind, deren sich die Natur zur Erreichung ihres grossen Gesammtzweckes bedient.

Noch ein dynamisches Verhältniss will ich berühren. Weil die Masse sämmtlicher Aetheratome eines Körpers verschwindend klein ist im Vergleich zur Masse aller Körperatome, und weil uns unsere Nerven nur lebhaftere Schwingungen des Aethers empfinden lassen, so werden bei schwächeren Störungen des Gleichgewichts in der Regel entweder nur die Aetheratome oder nur die Körperatome, nicht aber beide zugleich, in so lebhafte Bewegung kommen, dass sie empfinden

werden können. Werden Schallschwingungen erregt, so werden zwar die Aetherhüllen von den Körperatomen mit hin und her gerissen, allein so lange der Aether nur so langsam schwingt als die schallerregenden Körperatome, entstehen keine erheblichen Wärmewirkungen. Selbst mit Bach'schen Fugen kann ein grosses Orchester einen Konzertsaal nicht heizen, aber die Saiten der Violinen und Haare der Bögen werden dabei doch warm. Wird der Aether eines Körpers durch bereits in Bewegung befindlichen äussern Aether in Bewegung gebracht, so werden auch die Körperatome durch den Aether zur Bewegung angeregt, allein diese Aetherschwingungen geschehen viel zu rasch und die Massen der Körperatome sind viel zu gross, um in einen für unsere Sinne wahrnehmbaren Schwingungszustand gerathen zu können. Daher ist es bei derlei Problemen wohl gestattet, immer das eine oder das andere dieser Medien als ruhend anzunehmen. Bei Schallschwingungen dürfen die Aetherschwingungen, und bei Aetherschwingungen die Körperschwingungen vernachlässigt werden, was die mathematische Behandlung dieser Probleme unendlich vereinfacht.

SCHLUSS DER EINLEITUNG.

Durch das bisher Gesagte glaube ich meine Anschauung von dem Dynamidensystem, das ich meiner Untersuchung zu Grunde legen werde, klar ausgesprochen zu haben. Selbst ohne Rechnung ergeben sich aus den statischen und dynamischen Zuständen eines solchen Systems ganz leicht und ungezwungen die Erklärungen von sehr vielen chemischen und physikalischen Erscheinungen; allein diese Erklärungen mit blosen Worten haben noch nicht diejenige Schärfe und Bestimmtheit, welche die exakte Wissenschaft verlangt; die Berechtigung der Hypothese des Dynamidensystems kann nur aus Resultaten hervorgehen, die auf mathematischem Wege aus demselben gewonnen werden können. Leider ist es nicht immer möglich, diese Rechnungen mit vollkommener Strenge durchzuführen; die Schwierigkeiten sind zu gross, wenigstens für mich; man muss sich fast bei jedem Problem Vernachlässigungen und Annäherungen gefallen lassen. Es ist insbesondere der Einfluss der Gestalt der Atome auf die statischen und dynamischen Zustände unendlich schwierig durch Rechnung zu verfolgen, woher

es denn kommt, dass z. B. die statischen Probleme der Chemie und der Kristallbildung, mit welchen ich mich Jahre lang vergeblich gequält habe, durch Rechnung kaum zu bewältigen sein werden. Glücklicher Weise gibt es sehr viele und höchst wichtige Fragen, bei welchen die Gestalt der Atome vernachlässigt werden darf, gibt es ferner andere Probleme, bei welchen der Einfluss der Gestalt der Atome im Wesentlichen ohne Rechnung erkannt werden kann, was für manche Zwecke ziemlich genügt.

Aber ungeachtet dieser Mängel des Dynamidensystems, und obgleich dasselbe über das innere Wesen der Materie durchaus keinen Aufschluss gibt, sondern nur möglicher Weise aufzeigen kann, wie sich die Körperwelt aus den chemischen Atomen aufbaut, und welche Erscheinungen eintreten, so lange eine Zersetzung dieser Atome nicht eintritt, gewährt dieses Dynamidensystem so wesentlichen Nutzen, dass man es wahrlich für mehr als ein Phantasiespiel zu halten hat. Durch dieses Dynamidensystem weiss man doch bei jedem Schritt ganz klar, was man thut, unter welchen Umständen die Rechnungen mit den Thatsachen übereinstimmen können, welche Dinge im Verlauf der Rechnung, ohne einen merklichen Fehler befürchten zu dürfen, vernachlässigt werden können, und lassen sich so viele Erscheinungen auch ohne Rechnung wenigstens qualitativ erklären. Der grösste Nutzen dieses Dynamidensystems besteht aber in der umfassenden Uebersicht über die Gesammtheit der chemischen und physikalischen Erscheinungen, in dem Zusammenfassen so zahllos vieler isolirt stehenden Thatsachen, die in keiner Beziehung zu einander zu stehen scheinen, und doch mit einander so innig verbunden sind, und endlich zeigt es den Weg, den die Beobachtung zu gehen hat, wenn sie nicht blos Erscheinungen hervorrufen will (was heut zu Tage sehr unnöthig ist, denn der Erscheinungen kennen wir eben bereits so viel, dass uns der Kopf schwindelt), sondern zu festen Gesetzen gelangen will. Eine Aeusserung *Regnault's* dürfte hier am Platz sein.

Regnault hat bekanntlich durch höchst genaue Messungen und Beobachtungen gefunden, dass das sogenannte Mariott'sche Gesetz kein Gesetz, sondern nur eine Annäherungsregel ist. Hierüber äussert sich dieser ausgezeichnete Beobachter in seinen „Relations des expériences“ etc., p. 409 bis 410, in folgender Weise:

„La loi de Mariotte n'exprime pas les relations qui existent réellement entre les volumes d'une même masse de gaz et les pressions qu'elle sup-

porte; il convient de chercher s'il ne serait pas possible d'exprimer ces relations par une nouvelle loi.... *Malheureusement cette relation est évidemment trop complexe pour qu'on puisse espérer de la trouver uniquement par la méthode expérimentale.* Il est à désirer que les géomètres veuillent bien chercher la forme de cette fonction, en développant au moyen de l'analyse quelques hypothèses faites sur les forces moléculaires; l'expérience fournira facilement les données nécessaires pour calculer les constantes et pour soumettre les formules elles-mêmes à un critérium rigoureux."

Ich freue mich über diese Aeusserung, weil sie von einem eminenten Beobachter herrührt, und weil sie mir ganz aus der Seele gesprochen ist. Schon vor Jahren, bevor ich die „Relations" *Regnault's* kannte, machte ich den Versuch, das wahre Mariott'sche Gesetz vermittelst des Dynamidensystems auf analytischem Weg ausfindig zu machen; denn auch meine Ueberzeugung ist es schon längst, dass complizirte Gesetze auf rein experimentalem Weg nicht gefunden werden können, und nie gefunden worden sind. Auch diese Untersuchung über das Mariott'sche Gesetz ist eines der Fragmente, welche ich hiermit dem wissenschaftlichen Publikum vorzulegen wage. *Regnault's* Wunsch ist durch die Resultate meiner Untersuchungen über das Mariott'sche Gesetz wohl nicht ganz erfüllt, aber jedenfalls darf ich hoffen, den Weg betreten zu haben, der zu einer ganz exakten Beantwortung dieser Frage zu führen vermag.

Mit wenigen Worten möchte ich noch ein Bekenntniss aussprechen. Diese Dynamiden sind nur mit solchen Eigenschaften und Fähigkeiten ausgerüstet, wie wir sie an den unorganischen Stoffen antreffen, es kann also das Dynamidensystem, wenn seine Statik und Dynamik mit mathematischer Genauigkeit durchgeführt würde, sehr viele, vielleicht sogar alle möglichen physikalischen und chemischen Erscheinungen erklären, allein über die Erscheinungen der organischen Körper erhalten wir dadurch nicht den geringsten Aufschluss. Es ist absolut unmöglich, dass sich aus Atomen, wie wir sie angenommen haben, und durch Kräfte, wie wir sie charakterisirt haben, eine Zelle bilden kann, sondern diese Zellen sind entweder eigenthümliche in die Schöpfung hergestellte unzerstörbare Urgebilde von ganz anderer Art als die Körperatome, oder aber es bilden sich diese Zellen aus unorganischen Stoffen nicht nur durch die Kräfte, welche wir angenommen haben, sondern auch noch unter der Einwirkung von anderen Kräften, die man bildlich Gestaltungskräfte nennen könnte. Noch weniger

wird durch dieses Dynamidensystem das geringste über die Erscheinungen der geistigen Welt erklärt. Unsere Atome und Kräfte werden niemals einen *Cäsar*, *Newton* oder *Raphael* hervorbringen.

Ich beginne somit mit meinen Fragmenten, und bitte, dieselben nur als Versuche anzusehen, durch welche die mathematische Behandlung des Dynamidensystems angebahnt werden soll.

ERSTER ABSCHNITT.

Ueber die Wärme.

GRUNDBEGRIFFE ÜBER DIE WÄRME.

Temperatur. Im vollkommenen Gleichgewichtszustand mit sich selbst und mit den Attraktivkräften der Körperatome erscheint der Aether nur als repulsives Prinzip, das die Körperatome in gewissen Entfernungen und Gruppirungen erhält. In diesem Ruhezustand des Aethers sind die Körper absolut kalt, und können wir die Existenz des Aethers in den Nerven nicht empfinden. Befindet sich dagegen der Aether in den Körpern und in den Nerven in einem Bewegungszustand, in welchem die Aetheratome der Hüllen gegen die Kerne der Dynamiden nach normalen Richtungen schwingen, so sind die Körper erwärmt und haben wir das Gefühl von Wärme, und es entsteht nun weiter die Frage, wodurch die Intensität eines Wärmezustandes gemessen werden muss.

So wie man einmal den Gedanken gefasst hat, dass diese Intensität, die man Temperatur nennt, von dem Schwingungszustand des Aethers abhängt, so wird man sogleich sagen müssen, dass die Temperatur durch eine gewisse Funktion der Schwingungsgeschwindigkeit des Aethers, und vielleicht auch noch durch die Dichte des Aethers in dem Körper ausgedrückt werden müsse.

Ich habe sehr verschiedene Annahmen versucht; mit Ausnahme einer einzigen haben alle anderen zu Folgerungen geführt, die mit den Thatsachen der Wirklichkeit in Widerspruch stehen. Diese eine mit den Thatsachen der Wirklichkeit harmonirende Annahme ist: dass die Temperatur der mittleren lebendigen Kraft des einzelnen Aetheratoms proportional und von der Dichte des Aethers in den Körpern unabhängig ist.

Nennen wir also μ die Masse eines Aetheratoms, u^2 den wahren mittleren Werth des Quadrats der Schwingungsgeschwindigkeit eines Aetheratoms, T die Temperatur, welche diesem Schwingungszustand entspricht, k eine constante Zahl, so können wir setzen:

$$k T = \mu u^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Diesen mittleren Werth u^2 würde man finden, wenn man die totale im Aether einer Hülle vorhandene lebendige Kraft durch die Masse aller Atome einer Aetherhülle dividirt.

Um die dem Schwingungszustand entsprechende Temperatur nach Graden einer gewöhnlichen Thermometerscale auszudrücken, muss der Ausdruck (1) modifizirt werden. Nennen wir t die dem Schwingungszustand u entsprechenden Grade des hunderttheiligen Thermometers, u_0 die Schwingungsgeschwindigkeit, welche dem Nullpunkt des hunderttheiligen Thermometers entspricht, so haben wir zu setzen:

$$k\,t = \mu\,(u^2 - u_0^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Spezifische Wärme. Spezifische Wärme eines Stoffes wird in der Physik diejenige Wärmemenge oder Wärmethätigkeit genannt, welche erforderlich ist, um die Temperatur der Gewichtseinheit eines Stoffes um einen Grad zu erhöhen. Dabei unterscheidet man spezifische Wärme bei constantem äusseren Druck, und spezifische Wärme bei constantem Volumen. Nur die Wärmecapazitäten bei constantem Druck sind für die verschiedenen Stoffe durch Versuche ermittelt worden. Die Wärmecapazitäten bei constantem Druck kennt man nur für einige wenige Stoffe. Ich will diese Wärmecapazitäten die empirischen nennen, lege aber den folgenden Untersuchungen eine rationelle zu Grunde, indem ich feststelle: die wahre rationelle spezifische Wärme oder Wärmecapazität eines Stoffes ist die Anzahl der Aetheratome, welche in der Gewichtseinheit des Stoffes enthalten ist. Ob diese Annahme zulässig ist, werden die Erfolge zeigen. Wie diese rationelle Capazität mit den empirischen zusammenhängt, wird sich in Kürze ergeben. Die rationelle bezeichne ich mit c, die empirische bei constantem Druck mit C, die empirische bei constantem Volumen mit C_1.

Das Atomvolumen. Denkt man sich einen Stoff, in welchem die Atome gleichförmig vertheilt sind, in polyedrische Räume so getheilt, dass in den Mittelpunkt eines jeden Polyeders ein Körperatom oder Molekül zu stehen kommt, so kann man den Raum eines solchen Polyeders den Atomraum, und das Volumen eines solchen Polyeders Atomvolumen nennen, Benennungen, die bereits allgemein angenommen sind.

Nennen wir:

v das Atomvolumen eines Stoffes in dem so eben erklärten Sinn;

s das spezifische Gewicht des Stoffes, d. h. das absolute Gewicht der Volumseinheit eines Stoffes;

q das wahre absolute Gewicht des Kernes (Körperatoms oder Moleküls) einer Dynamide;

V das Volumen des ganzen Körpers;

Q das totale Gewicht des Körpers;

ε die mittlere Entfernung zweier Kerne;

so ist:

$$s = \frac{Q}{V}$$

$$\frac{Q}{q} = \frac{V}{v}$$

$$v = e^3$$

Hieraus folgt auch:

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{q}{v} \\ v &= e^3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{q}{s} \\ e &= \left(\frac{q}{s}\right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Dichte des Aethers. Dichte des Aethers nenne ich die Anzahl der Aetheratome, welche in der Volumseinheit eines Stoffes enthalten ist, und bezeichne dieselbe mit $\varDelta$.

Nun ist c die Anzahl der Aetheratome, welche in der Gewichtseinheit eines Körpers enthalten ist (die rationelle Wärmecapazität), s das Gewicht der Volumseinheit eines Körpers; man hat daher:

$$\varDelta = c\,s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

d. h. man findet die Dichte des Aethers durch das Produkt aus der (wahren) Wärmecapazität eines Stoffes in das spezifische Gewicht desselben.

Regnault hat zuerst gefunden, dass das Produkt $\mathfrak{C}_1 s$ aus Wärmecapazität bei constantem Druck und spezifischem Gewicht für alle Gase sehr nahe den gleichen Werth hat (Tabelle A). Wir werden aber später zeigen, dass für Gase das Verhältniss $\frac{c}{\mathfrak{C}_1}$ aus der theoretischen und empirischen Wärmecapazität für Gase wahrscheinlich constant ist, dürfen daher vermöge (5) den von *Regnault* gefundenen Satz dahin deuten, dass in allen Gasen die Dichte des Aethers constant ist. Dieses Ergebniss unserer Theorie in Verbindung mit der Thatsache, dass in den meisten Fällen das Volumen der Verbindung zweier oder mehrerer Gase kleiner ist als die Summe der Volumina der Bestandtheile, führt zu der interessanten Folgerung, dass die chemischen Verbindungen der Gase in den meisten Fällen mit Aetherausscheidungen erfolgen. In der That, wenn sich z. B. 1 Kubikzoll eines Gases A mit 1 Kubikzoll eines anderen Gases B verbindet, und daraus 1 Kubikzoll eines zusammengesetzten Gases bildet, so enthält dieser gerade nur so viel Aether in sich, als überhaupt in jedem Kubikzoll Gas enthalten ist; es muss daher bei diesem Vorgang 1 Kubikzoll Aether ausgeschieden worden sein. Allein bei jedem chemischen Prozesse werden, wie ich in der Folge zeigen werde, Wirkungsgrössen oder Arbeitsgrössen entwickelt, und diese gehen grösstentheils in den Aether über. Der Aether wird also bei

einer chemischen Verbindung von Gasen nicht in einem ruhigen, sondern in einem bewegten Zustand ausgeschieden, und daher rühren nach meiner Ansicht die Wärme-, Licht- und Elektrizitäts-Erscheinungen, von welchen die chemischen Prozesse begleitet sind. Auch folgt aus unserer Theorie, dass auch Aenderungen der Aggregatzustände mit Aetherausscheidungen verbunden sind. Die spezifische Wärme des Wassers wird gleich 1 gesetzt. Die spezifische Wärme des Wasserdampfs ist nach *Regnault* 0·4750, in 1 Kilogramm Wasserdampf ist also 1 — 0·4750 = 0·525 weniger Aether enthalten, als in 1 Kilogramm Wasser, oder von dem in 1 Kilogramm Wasser enthaltenen Aether wird durch die Verdampfung 0·525 ausgeschieden, und da diese Verdampfung mit Entwickelung von mächtigen Arbeitsgrössen verbunden ist, so entweicht dabei der Aether in bewegtem Zustand, und darin möchte wohl der Grund liegen, weshalb Verdünstungen in der Atmosphäre und Dampfausströmungen aus Dampfkesseln mit elektrischen Erscheinungen erfolgen.

Aethermenge einer Dynamide. Unter dieser Benennung wollen wir die Anzahl der Aetheratome einer Aetherhülle verstehen, und bezeichnen dieselbe mit i. Nun ist $\frac{1}{q}$ die Anzahl der Körperatome, welche in der Gewichtseinheit eines Stoffes enthalten ist, demnach $\frac{i}{q}$ die Anzahl der Aetheratome, welche die Gewichtseinheit eines Stoffes enthält; daher hat man:

$$\frac{i}{q} = c$$

oder:

$$i = q c \qquad (6)$$

Das Produkt aus dem Atomgewicht q eines Körpers in die wahre Wärmecapazität drückt die Anzahl der Aetheratome einer Dynamide aus. Das Produkt $q\,\mathfrak{C}_1$ ist, wie beifolgende Tabelle B zeigt, für die einfachen Stoffe wahrscheinlich constant. Wenn sich dies durch weitere genauere Bestimmungen bestätigen sollte, so müssten wir nach unserer Theorie den Satz aussprechen: die Dynamiden aller einfachen Stoffe enthalten gleich viel Aether, und daraus würde man ferner folgern dürfen, dass alle chemisch einfachen Stoffe gegen den Aether gleiche Anziehungskraft ausüben. Indessen alle Folgerungen aus derlei Zahlen scheinen mir heut zu Tage noch sehr gewagt zu sein, denn diese Zahlen sind noch nicht verlässlich; insbesondere den Wärmecapazitäten möchte ich nicht trauen. Ich füge noch eine Tabelle C hinzu über die zusammengesetzten starren und tropfbar flüssigen Verbindungen. Bekanntlich hat *Schröter* gefunden, dass in den meisten Fällen die Aethermenge $q\,\mathfrak{C}_1$ der Verbindungen so gross ist als die Summe der Aethermenge $q\,\mathfrak{C}_1$ der Bestandtheile. Ich bin überzeugt, dass diese Zahlen, wenn sie einmal ganz festgestellt sein werden, wie die Fundamentalsterne der Astronomen, zu sehr wichtigen Folgerungen führen, und die wahre Basis der Physik und Chemie bilden werden, allein für den Zweck, welchen ich hier im Auge habe, sind sie nicht von erheblicher Wichtigkeit. Ich setze daher meinen Weg weiter fort.

TABELLE A.

Einfache und zusammengesetzte Gase.

Benennung.	Bezeichnung.	Atomgewicht. q	Spezif. Gewicht. s	Wärmecapazität. $\mathfrak{G}_1$	Atomvolumen. $v = \frac{q}{s}$	Aether einer Dynamide. $i = q\,\mathfrak{G}_1$	Dichte des Aethers. $\Delta = s\,\mathfrak{G}_1$
Sauerstoffgas	O	8	1·432	0·2182	5·583	1·7456	0·3125
Wasserstoffgas . . .	H	1	0·089	3·4046	11·188	3·4046	0·3030
Chlorgas.	Cl	35·4	3·170	0·1141	11·166	4·0391	0·3616
Stickgas.	N	14	1·268	0·2440	11·041	3·4160	0·3094
Wasserdampf. . . .	H O	9	0·805	0·4750	11·180	4·2750	0·3824
Kohlenoxydgas . . .	C O	14	1·264	0·2479	11·076	3·4710	0·3133
Kohlensaures Gas .	CO_2	22	1·980	0·2164	11·111	4·7608	0·4284
Schwefligsaur. Gas .	SO_2	32	2·873	0·1262	11·138	6·2784	0·5637
Schwefelhydrogen .	H S	17	1·538	0·2376	11·111	4·0392	0·3653
Salzsaures Gas. . .	Cl H	36·4	1·629	0·2219	22·345	8·0772	0·3613
Stickoxydulgas . . .	N O	22	1·984	0·2240	11·089	4·9280	0·4444
Stickoxydgas	NO_2	30	1·350	0·2692	22·222	8·0760	0·3634
Ammoniakgas. . . .	NH_3	17	0·768	0·4751	21·875	8·0770	0·3649
Cyangas	C_2N	26	2·362	0·1553	11·008	4·0378	0·3668

TABELLE B.

Einfache Stoffe.

Benennung.	Bezeichnung.	Atomgewicht. q	Spezif. Gewicht. s	Wärmecapazität. G_1	Atomvolumen. $v = \frac{q}{s}$	Aether einer Dynamide. $q\,G_1$	Dichte des Aethers. $s\,G_1$
Alumium	Al	13·7	—	—	—	—	—
Antimon.	Sb	120	6·7010	0·0508	17.908	6·096	0·3404
Arsen	As	75·2	5·959	0·0814	12·619	6·1213	0·4851
Barium	Ba	68·6	—	—	—	—	—
Blei	Pb	103·8	11·3889	0·0314	9·1141	3·2593	0·3576
Bor	B	10·8	—	—	—	—	—
Brom	Br	78·4	2·9800	0·1350	26·308	10·5840	0·4023
Cadmium	Cd	55·8	8·6355	0·0567	6·4617	3·1639	0·4896
Calcium	Ca	20	—	—	—	—	—
Cer.	Ce	46	—	—	—	—	—
Chlor.	Cl	35·4	1·3333	—	26·550	—	—
Chrom.	Cr	28·1	5·9000	—	—	—	—
Didym.	D	—	—	—	—	—	—
Eisen	Fe	28	7·8439	0·1138	3·5690	3·1864	0·8926
Erbium	E	—	—	—	—	—	—
Fluor.	F	18·7	—	—	—	—	—
Glycium.	G	4·7	—	—	—	—	—
Gold	Au	199	19·2000	0·0324	10·364	6·4476	0·6221
Iridium	Ir	98·7	18·6300	0·0368	5·2979	3·6322	0·6855
Jod	J	126	4·9480	0·0541	25·464	6·8166	0·2677
Kalium	K	39·2	0·8650	—	—	—	—
Kiesel	Si	15	—	—	—	—	—
Kobalt.	Co	29·6	8·5384	0·1070	3·4667	3·1672	0·9136
Kohlenstoff	C	6	3·5000	—	1·7143	—	—
Kupfer.	Cu	31·8	8·7210	0·0951	3·6463	3·0242	0·8294
Lanthan.	La	36·1	—	—	—	—	—
Lithium	L	6·4	—	—	—	—	—
Magnium	Mg	12·7	—	—	—	—	—
Mangan	Mn	27·6	8·0000	0·1441	3·4500	3·9772	1·1528
Molybdän.	Mo	48	8·6000	0·0722	5·5814	3·4656	0·6209
Natrium.	Na	23·2	0·9722	—	23·86	—	—
Nickel	Ni	29·6	8·637	0·1086	3·427	3·2146	0·9379

Benennung.	Bezeichnung.	Atomgewicht. q	Spezif. Gewicht. s	Wärmecapazität. $\mathfrak{G}_1$	Atomvolumen. $v = \frac{q}{s}$	Aether einer Dynamide. $q\,\mathfrak{G}_1$	Dichte des Aethers. $s\,\mathfrak{G}_1$
Osmium	Os	99·6	10·000	—	9·960	—	—
Palladium	Pd	53·4	11·5000	0·0593	4·643	3·1666	0·6819
Phosphor	P	31·4	1·7500	0·1887	17·942	5·9250	0·2602
Platin	Pt	98·7	21·5000	0·0324	4·5906	3·1979	0·6966
Quecksilber	Hg	100	13·559	0·0333	7·3751	3·3766	0·4515
Rhodium	R	52·1	11·2000	—	4·6518	—	—
Scheel	Sl	95	17·4000	0·0364	5·4598	3·4580	0·6334
Schwefel	S	16	2·0000	0·2026	8·0000	3·2416	0·4092
Selen.	Se	40	4·3100	0·0837	9·2807	3·3480	0·3607
Silber	Ag	108	10·4280	0·0570	10·3567	6·1617	0·5944
Stickstoff	N	14	—	0·2754	—	3·8556	—
Strontium	Sr	44	—	—	—	—	—
Tantal	T	185	—	—	—	—	—
Tellur	Te	64	6·2580	0·0515	10·226	3·2960	0·3223
Terbium.	Tr	—	—	—	—	—	—
Thorium.	Th	59·6	—	—	—	—	—
Titan	Ti	24	5·2800	—	4·5454	—	—
Uran.	U	60	9·0000	—	6·6666	—	—
Vanadin	V	68·6	—	—	—	—	—
Wasserstoff	H	1	—	3·4046	—	3·4046	—
Sauerstoff.	O	8	—	0·2182	—	1·7456	—
Wismuth	Bi	208	9·8220	0·0308	21·177	6·4064	0·3025
Yttrium	Y	32·2	—	—	—	—	—
Zink	Zn	32·2	6·9154	0·0955	4·6562	3·0751	0·6604
Zinn	Sn	59	7·29	0·0562	8·0932	3·3158	0·4096
Zirconium	Zr	22·4	—	—	—	—	—

TABELLE C.

Zusammengesetzte starre und tropfbar-flüssige Verbindungen.

Verbindung.	Formel.	Atom-gewicht. q	Spezif. Gewicht. s	Spezif. Wärme. $\mathfrak{G}_1$	Atom-volumen. v	Aether einer Dynamide. $\mathfrak{G}_1$ q	Dichte des Aethers. $\mathfrak{G}_1$ s
Kupferoxydul	$Cu_2\,O$	71·6	5·300	0·1173	13·51	7·683	0·6220
Bittererde	Mg O	20·7	3·200	0·2439	6·468	5·049	0·7804
Bleioxyd	Pb O	111·8	9·209	0·0509	12·140	5·691	0·4687
Magneteisen	$Fe_3\,O_4$	113·6	5·094	0·1641	22·300	19·062	0·3112
Alaunerde	$Al_2\,O_3$	51·4	3·909	0·2173	13·148	11·169	0·8494
Chromoxyd	$Cr_2\,O_3$	80·2	5·210	0·1796	15·393	14·404	0·9356
Eisenglanz	$Fe_2\,O_3$	78·4	5·251	0·1669	14·930	13·085	0·8764
Kieselerde	$Si\,O_2$	30·8	2·652	0·1913	11·613	5·892	0·5073
Titanoxyd	$Ti\,O_2$	40·5	3·826	0·1703	10·585	6·897	0·6515
Zinnstein	$Sn\,O_2$	75	6·960	0·0933	10·776	6·997	0·6493
Manganhyperoxyd .	$Mn\,O_2$	43·6	4·940	0·1910	8·826	8·328	0·8435
Boraxsäure	$B\,O_3$	34·8	1·830	0·2374	19·016	8·261	0·4344
Scheelsäure	$W\,O_3$	119	5·274	0·0798	22·563	9·496	0·4209
Molybdänsäure . . .	$Mo\,O_3$	72	3·460	0·1324	20·809	9·533	0·4580
Arsenige Säure . .	$As\,O_3$	99·2	3·698	0·1279	26·824	12·687	0·4728
Antimonoxyd	$Sb\,O_3$	153	5·560	0·0901	27·518	13·785	0·5010
Antimonige Säure .	$Sb\,O_4$	161	6·525	0·0953	24·674	15·343	0·6219
Flussspath	Ca F	39·2	3·150	0·2082	12·444	8·164	0·6558
Halb-Chlor-Kupfer .	$Cu_2\,Cl$	99	3·678	0·1383	26·916	13·692	0·5086
Halb-Chlor-Quecksilber	$Hg_2\,Cl$	238·2	6·992	0·0520	34·067	12·386	0·3636
Chlor-Calium	K Cl	74·6	1·915	0·1729	38·955	12·898	0·3310
Chlor Natrium . . .	Na Cl	58·6	2·078	0·2140	28·200	12·540	0·4447
Chlor-Silber	Ag Cl	143·5	5·501	0·0911	26·086	13·073	0·5012
Chlor-Barium	Ba Cl	104	3·704	0·0896	28·077	9·318	0·3318
Chlor-Strontium . .	Sr Cl	79·4	2·803	0·1199	28·326	9·520	0·3360
Chlor-Calcium	Ca Cl	55·9	2·040	0·1642	27·402	9·179	0·3350
Chlor-Blei	Pb Cl	139·2	5·802	0·0664	23·991	9·243	0·3852
Chlor-Quecksilber .	Hg Cl	136·8	5·403	0·0689	25·319	9·425	0·3723
Brom-Calium	Br K	117·6	2·415	0·1132	48·662	13·312	0·2734
Brom-Blei	Pb Br	182·2	6·630	0·0533	27·481	9·711	0·35[illegible]3
Halb-Jodquecksilb.	$Hg_2\,J$	328·8	7·644	0·0395	43·014	12·987	0·3018

Verbindung.	Formel.	Atom-gewicht. q	Spezif. Gewicht. s	Spezif. Wärme. $\mathfrak{G}_1$	Atom-volumen. v	Aether einer Dynamide. $\mathfrak{G}_1 q$	Dichte des Aethers. $\mathfrak{G}_1 s$
Jod-Kalium	KJ	165·2	2·908	0·0819	56·808	13·530	0·2381
Jod-Silber	AgJ	234·1	5·026	0·0616	46·577	14·420	0·3096
Jod-Blei	PbJ	229·8	6·021	0·0427	38·166	9·812	0·2571
Einf. Jodquecksilber	HgJ	227·4	6·200	0·0420	36·677	9·551	0·2604
Halb-Schwefelkupfer	Cu_2S	79·6	5·977	0·1212	13·318	9·647	0·7244
Schwefelzink	ZnS	48·2	3·923	0·1230	12·286	5·929	0·4826
Einf. Schwefelzinn .	SnS	75	4·852	0·0836	15·457	6·270	0·4057
Schwefelblei.	PbS	119·8	7·505	0·0509	15·962	6·098	0·3821
Schwefelnickel . . .	NiS	45·6	5·200	0·1281	8·769	5·841	0·6661
Zinnober.	HgS	117·4	8·060	0·0480	14·565	6·017	0·3869
Schwefelsilber. . . .	AgS	124·1	6·850	0·0746	18·117	9·258	0·5110
Schwefelwismuth . .	Bi_2S_3	260·8	7·000	0·0600	37·260	15·648	0·4200
Schwefelkohlenstoff	CS_2	38	1·272	0·3290	29·874	12·502	0·4184
Wasserblei	MoS_2	80	4·690	0·1233	17·057	9·864	0·5783
Musivgold	SnS_2	91	4·425	0·1193	20·565	10·856	0·5279
Schwefelkies	FeS_2	59·2	5·183	0·1301	11·421	7·702	0·6743
Realgar	AsS_2	107·2	3·544	0·1111	30·250	11·910	0·3937
Auripigment.	AsS_3	123·2	3·459	0·1132	35·617	13·946	0·3916
Dreifach. Schwefel-antimon	SbS_3	177	4·334	0·0907	40·839	16·054	0·3931
Kohlensaures Kali .	KO, CO_2	69·2	2·264	0·2162	30·565	14·961	0·4894
Kohlensaur. Natron	NaO, CO_2	53·2	2·466	0·2727	21·573	14·508	0·6724
Witherit	BaO, CO_2	98·6	4·302	0·1104	22·919	10·885	0·4739
Strontianit.	SrO, CO_2	74	3·624	0·1448	20·419	10·715	0·5247
Kalkspath	CaO, CO_2	50·5	2·721	0·2086	18·559	10·534	0·5675
Talgspath . . . . . ,	MgO, CO_2	42·7	3·056	0·2220	13·972	9·479	0·6784
Bleispath.	PbO, CO_2	133·8	6·428	0·0814	20·815	10·891	0·5232
Junkerit	FeO, CO_2	57·2	3·818	0·1934	19·981	11·062	0·7383
Chromsaures Kali .	KO, CrO_3	99·3	2·640	0·1850	37·614	18·370	0·3884
Zweif. chromsaures Kali	$KO, 2CrO_3$	151·4	2·603	0·1894	58·164	28·675	0·4929
Schwefelsaures Kali	KO, SO_3	87·2	2·623	0·1901	33·244	16·576	0·4987
Schwefelsaur. Natron	NaO, SO_3	71·2	2·631	0·2311	27·061	16·454	0·6050
Schwerspath.	BaO, SO_3	116·6	4·200	0·1128	27·762	13·152	0·4738
Schwefelsaurer Strontian	SrO, SO_3	92·0	3·958	0·1428	23·244	13·138	0·5651

Verbindung.	Formel.	Atom-gewicht. q	Spezif. Gewicht. s	Spezif. Wärme. $\mathfrak{S}_1$	Atom-volumen. v	Aether einer Dynamide. $\mathfrak{S}_1\, q$	Dichte des Aethers. $\mathfrak{S}_1\, s$
Schwefelsaur. Kalk	CaO, SO_3	68·5	2·927	0·1854	23·430	12·700	0·5427
Schwefelsaure Bittererde	MgO, SO_3	60·7	2·607	0·2216	23·284	13·451	0·5777
Schwefelsaures Bleioxyd	PbO, SO_3	151·8	6·169	0·0848	24·606	12·873	0·5230
Salpetersaures Kali	KO, NO_5	101·2	2·058	0·2387	49·174	24·156	0·4911
Salpetersaur. Natron	NaO, NO_5	85·2	2·226	0·2782	38·274	23·703	0·6203
Salpetersaures Silberoxyd	AgO, NO_5	170·1	4·355	0·1435	39·058	24·409	0·6248
Salpetersaur. Baryt	BaO, NO_5	130·6	3·185	0·1523	41·004	19·890	0·4850
Salpetersaur. Strontian	SrO, NO_5	106	2·810	0·1683	37·722	17·840	0·4729

Arbeit, welche der Erwärmung eines Körpers entspricht. Einen Stoff erwärmen heisst nach unserer Anschauungsweise: machen, dass der Aether des Stoffes in radiale Schwingungen geräth. Nehmen wir vorläufig an, dass es möglich wäre, den Aether eines Körpers in radiale schwingende Bewegungen zu versetzen, ohne irgend eine andere Veränderung in dem Körper zu veranlassen. Nehmen wir also an: 1. dass bei dem Akt der Erwärmung keine Volumsänderung eintrete, dass also durch äussere gegen die Oberfläche des Körpers einwirkende Kräfte die Ausdehnung, welche durch die Erwärmung entstehen will, verhindert wird; 2. dass während des Erwärmungsaktes die Kerne der Dynamiden ihren Ort und ihre Stellung nicht ändern; 3. dass selbst die Aetherhüllen keine Ausdehnung erleiden würden, was allerdings nicht verhindert werden kann; 4. dass nur allein Radialschwingungen, d. h. solche Schwingungen hervorgerufen werden, auf welchen nach unserer Anschauung der erwärmte Zustand beruht, und bezeichnen wir mit:

τ und τ_1 zweierlei Temperaturen des Stoffes, gemessen nach Graden des hunderttheiligen Thermometers;

u und u_1 die diesen Temperaturen entsprechenden Schwingungsgeschwindigkeiten;

w die in Kilogramm-Metern ausgedrückte Wirkung oder Arbeit, welche erforderlich ist, um den in Q Kilogramm eines Stoffes enthaltenen Aether aus dem Schwingungszustand u in den Schwingungszustand u_1 zu versetzen, so erhalten wir nun mit Berücksichtigung der früher festgestellten Bezeichnungen folgendes:

Es ist $\frac{Q}{q}$ die Anzahl der Kerne des Körpers, demnach $i\,\frac{Q}{q}$ die Anzahl der Aetheratome des Körpers, folglich $\mu\, i\,\frac{Q}{q}$ die Aethermasse desselben, demnach sind:

$$\mu\, i \frac{Q}{q} u_1^2 \qquad \mu\, i \frac{Q}{q} u^2$$

die lebendigen Kräfte des Aethers in den beiden Schwingungszuständen. Man hat daher:

$$W = i \frac{Q}{q} \mu \left(u_1^2 - u^2\right)$$

Nun ist aber vermöge der Gleichung (2) (Seite 30)

$$k\, t_1 = \mu \left(u_1^2 - u_0^2\right), \qquad k\, t = \mu \left(u^2 - u_0^2\right)$$

und vermöge (6) (Seite 32):

$$\frac{i}{q} = c$$

daher findet man:

$$W = Q\, c\, k\, (t_1 - t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Die zur Erwärmung eines Körpers erforderliche Arbeit ist demnach der Stoffmenge, der rationellen Wärmecapazität und der Temperaturdifferenz, welche hervorgebracht werden soll, direkt proportional.

Diese Gleichung (7) gibt uns auch über die Bedeutung der Constanten k Aufschluss.

Setzen wir in dieser Gleichung (7):

$$Q = 1, \qquad c = 1, \qquad t_1 - t = 1$$

so folgt $W = k$. Diese constante Grösse k ist demnach der Arbeit, welche erforderlich ist, um die Temperatur der Gewichtseinheit eines Stoffes, dessen Wärmecapazität gleich Eins ist, um einen Grad zu erhöhen, oder k ist die zur Hervorbringung einer „Wärmeeinheit“ erforderliche Arbeit, oder k ist das mechanische Aequivalent einer Wärmeeinheit. Nehmen wir in Uebereinstimmung mit den Physikern die Wärmecapazität des Wassers als Einheit aller Capazitäten, so drückt k die Arbeit aus, um die Temperatur von 1 Kilogramm Wasser um einen Grad zu erhöhen.

Die bis hierher aufgestellten Begriffe über die Wärmeverhältnisse habe ich mir nicht erst vor Kurzem, sondern schon vor 15 Jahren zurecht gemacht, und theilweise bei meinen Vorträgen über die technische Benützung der Wärme gebraucht.

GLEICHZEITIGE ERWÄRMUNG UND AUSDEHNUNG EINES KÖRPERS.

Wenn ein unter einem äusseren Druck befindlicher Körper erwärmt und gleichzeitig ausgedehnt wird, wird die lebendige Kraft oder Arbeit, welche in den Körper gebracht werden muss, um diese Ausdehnung und gleichzeitige Erwärmung hervorzubringen, durch folgende Vorgänge verbraucht:

1. durch die Arbeit, welche nothwendig ist, um den Schwingungszustand des Aethers in den Hüllen der Dynamiden zu erhöhen, d. h. um die Temperatur der Substanz zu steigern;
2. durch die Ueberwindung des äusseren auf den Körper einwirkenden Druckes;
3. durch die Arbeiten, welche den Distanzänderungen der Dynamiden und der Aetheratome entspricht;
4. durch die Aenderungen der Schwingungszustände der Körperatome.

Diese Arbeiten können auf folgende Weise ausgedrückt werden.

Nennen wir:

Q das Gewicht des Körpers in Kilogrammen;

dW die Wärmemenge, welche dem Körper in einem unendlich kleinen Zeitelement dz während des Aktes der Erwärmung und Ausdehnung mitgetheilt wird;

V das Volumen des Körpers am Anfange dieses Zeitelementes;

dV die Volumsänderung des Körpers im Zeitelement dz;

t die Temperatur am Anfang und dt die Temperaturänderung während des Zeitelementes dz;

c die rationelle Wärmecapazität des Stoffes, d. h. die in der Gewichtseinheit des Stoffes enthaltene Aethermenge;

N die auf einen Quadratmeter der Oberfläche des Körpers wirkende äussere Pressung;

k das mechanische Aequivalent einer Wärmeeinheit oder die Arbeit, welche erforderlich ist, um eine Wärmeeinheit hervorzubringen;

dJ die innere Arbeit, welche einer Temperaturänderung dt ohne Volumsänderung entspricht. Diese Grösse besteht aus dreierlei Arbeit. Wenn nämlich eine Temperaturänderung ohne Volumenänderung eintritt, entsteht zwar keine Distanzänderung der Körperatome oder Moleküle, allein die Aetherhüllen werden ausgedehnt und dadurch werden dreierlei Thätigkeiten bewirkt. Durch die Ausdehnungen der Hüllen wachsen die Distanzen aller Aetheratome einer Hülle von den Kernen, und dadurch wird eine gewisse Arbeit konsumirt. Allein indem sich die Aetherhüllen ausdehnen, ändert sich die Distanz der Aetheratome einer Hülle, und durch diesen Vorgang wird eine gewisse Arbeit produzirt. Durch die Ausdehnung der Aetherhülle ändern sich aber auch die Distanzen der Aetheratome einer Hülle von den Aetheratomen der andern Hülle, so wie auch von den Kernen der andern Dynamiden, und dadurch wird abermals eine gewisse Arbeit produzirt oder konsumirt. Dieses dJ drückt mithin eine sehr komplizirte Thätigkeit aus;

dJ_1 die innere Arbeit, welche einer unendlich kleinen Volumsänderung dV ohne Temperaturänderung entspricht. Dieses dJ_1 ist abermals eine sehr complizirte Thätigkeit, indem eine reine Volumsänderung nicht nur Aenderungen in der Distanz der Körperatome, sondern auch Ausdehnungen in den Aetherhüllen zur Folge hat;

dL die Aenderung der lebendigen Kraft des Bewegungszustandes der Körperatome.

Diese Bezeichnungen vorausgesetzt, haben wir nun nach dem allgemeinen Prinzip der Arbeit oder der Thätigkeit (Prinzipien der Mechanik, Seite 150):

$$k\,d\,W = k\,c\,Q\,d\,t + N\,d\,V + d\,J + d\,J_1 + d\,L \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Diese Gleichung kann etwas vereinfacht werden, denn man kann vermittelst des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeit zeigen, dass $d\,J$ für alle Substanzen gleich Null ist. In der That, $d\,J$ drückt die Arbeit aus, welche einer Ausdehnung der Aetherhüllen ohne Distanzänderung der Körperatome entspricht. Ist nun die Substanz anfänglich in Ruhe und dehnt man die Aetherhüllen unendlich wenig aus, so wird durch die Totalität der Kräfte nur allein die Arbeit $d\,J$ hervorgebracht, denn der äussere Druck N produzirt und konsumirt keine Wirkung, wenn keine Volumsänderung statt findet; es ist demnach vermöge des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeit $d\,J = 0$ und somit erhalten wir statt (8) die einfachere Gleichung:

$$k\,d\,W = k\,c\,Q\,d\,t + N\,d\,V + d\,J_1 + d\,L \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

und diese wollen wir zunächst zur Bestimmung von k benützen.

LANGSAME ERWÄRMUNG UND AUSDEHNUNG EINES GASES. BESTIMMUNG DES ÄQUIVALENTES DER WÄRMEEINHEIT.

Nehmen wir an, eine Gasmenge werde langsam erwärmt und sie dehne sich dabei aus, so können unter solchen Umständen keine Körperschwingungen entstehen, es ist demnach in der Gleichung (9) $d\,L = 0$ zu setzen, und dann erhalten wir:

$$k\,d\,W = k\,c\,Q\,d\,t + N\,d\,V + d\,J_1 \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Wir wollen nun zunächst sehen, unter welchen Umständen diese Gleichung (10) mit den für Gase aufgefundenen Thatsachen in Harmonie gebracht werden kann.

Nach *Regnault's* Versuchen gelten folgende Sätze:

1. der Wärmeausdehnungscoeffizient ist nicht gleich gross für alle Gase, aber doch beinahe;
2. der Wärmeausdehnungscoeffizient für ein und dasselbe Gas ist nicht absolut constant, sondern ändert sich mit der Dichte desselben, jedoch nur äusserst wenig;
3. das Mariott'sche Gesetz ist nicht absolut richtig, und die Abweichungen in dem Verhalten der Gase von diesem Gesetz sind für verschiedene Gase verschieden, jedoch nur sehr unbeträchtlich;
4. die Wärmecapazität der Gase bei constantem Druck, so wie auch jene bei constantem Volumen, d. h. die beiden empirischen Wärmecapazitäten sind unabhängig sowohl von der Temperatur als auch von dem äusseren Druck.

Für den ersten, zweiten und dritten Satz werden wir in der Folge die Erklärungen finden, wenn wir die Theorie des Mariott'schen Gesetzes aus unserem Dynamidensystem entwickeln werden. Der vierte Satz ist für unsere über die Wärme aufgestellten Prinzipien von grösster Wichtigkeit und findet seine Erklärung in diesen Prinzipien. Denn da nach unserem Ausspruch die Wärmecapazität die in der Gewichtseinheit eines Stoffes enthaltene

Aethermenge ausdrückt, so bleibt diese constant, so lange kein Aether entweicht, sei es nun, dass der Schwingungszustand gesteigert oder die Dichte des Gases verändert wird.

Nehmen wir an, dass das Gay Lussac'sche Gesetz und das Mariott'sche Gesetz nicht Annäherungen, sondern absolute Wahrheiten seien und suchen wir zu bestimmen, unter welchen Umständen die für Gase gefundene Gleichung (10) mit diesen Gesetzen in Uebereinstimmung gebracht werden kann.

Ist $dV = o$, d. h. findet keine Volumsänderung, sondern nur Erwärmung statt, so ist auch $dJ_1 = o$ und

$$k\,dW = k\,c\,Q\,dt$$

demnach:

$$\frac{dW}{Q\,dt} = c$$

Allein für $dV = o$ ist $\frac{dW}{Q\,dt}$, offenbar die Wärmecapazität bei constantem Volumen, ist also gleich $\mathfrak{G}$, demnach hat man:

$$c = \mathfrak{G} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

d. h. die empirische Wärmecapazität bei constantem Volumen stimmt mit der rationellen Wärmecapazität überein, drückt also die in der Gewichtseinheit eines Körpers enthaltene Aethermenge aus.

Nehmen wir nun an, N sei constant, so ist $\frac{dW}{Q\,dt}$ die Wärmecapazität bei constantem Druck, die wir mit $\mathfrak{G}_1$ bezeichnet haben. Dividiren wir die Gleichung (10) durch $k\,Q\,dt$, betrachten in derselben N als constant, setzen also für $\frac{dW}{Q\,dt}$ den Werth $\mathfrak{G}_1$, so erhalten wir wegen $c = \mathfrak{G}$:

$$\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G} + \frac{N}{k\,Q}\,\frac{dV}{dt} + \frac{dJ_1}{k\,Q\,dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Wenn wir das Gay-Lussac'sche und Mariott'sche Gesetz gelten lassen, ist:

$$N\,V = N_0\,V_0\,(1 + \alpha\,t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

wobei α den Wärmeausdehnungs-Coeffizienten, und V_0 das Volumen des Gases bei 0° Temperatur und unter einem äusseren Druck N_0 bezeichnet.

In der Gleichung (12) entspricht $\frac{dV}{dt}$ der Volumsänderung ohne Druckänderung. Dieser Werth von $\frac{dV}{dt}$ ist demnach vermöge (13) $\frac{\alpha\,N_0\,V_0}{N}$.

Der Ausdruck (12) wird demnach:

$$\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G} + \frac{\alpha\,N_0\,V_0}{k\,Q} + \frac{dJ_1}{k\,Q\,dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Allein nach den Beobachtungen von *Regnault*, wie auch nach unseren Prinzipien ist $\mathfrak{C}$ sowohl von N als auch von t ganz unabhängig. Es ist demnach in (14) $\frac{dJ_1}{dt} = 0$ zu setzen, und folglich erhält man:

$$\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C} + \frac{\alpha N_0 V_0}{k Q}$$

oder

$$k = \frac{\alpha N_0 V_0}{Q (\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{C})}$$

oder wenn man das spezifische Gewicht des Gases bei 0° Temperatur und unter dem Druck N_0 mit s_0 bezeichnet, also $\frac{Q}{V_0} = s_0$ setzt:

$$k = \frac{\alpha N_0}{s_0 (\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{C})} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

Da $\frac{dJ_1}{dt} = 0$ und vermöge (13) $N = \frac{N_0 V_0}{V} (1 + \alpha t)$ ist, so wird die Gleichung (10):

$$dW = \mathfrak{c} Q \, dt + \frac{N_0 V_0 (1 + \alpha t)}{k} \cdot \frac{dV}{V} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

Unsere theoretische Gleichung harmonirt also mit den Thatsachen, wenn wir $\frac{dJ_1}{dt} = 0$ setzen und für k den Werth nehmen, welchen die Gleichung (15) darbietet.

Für atmosphärische Luft ist:

der Wärmeausdehnungs-Coeffizient . . . . $\alpha = 0{\cdot}00367$
das Gewicht von einem Kubikmeter Luft bei 0° Temperatur und unter
dem Druck der Atmosphäre . . . . $s_0 = 1{\cdot}293$ Kilg.
der Druck der Luft auf einen Quadratmeter . . . . $N_0 = 10334$ „
die Wärmecapazität der atmosphärischen Luft bei constantem Druck,
nach *Regnault* . . . . $\mathfrak{C}_1 = 0{\cdot}2377$
die Wärmecapazität bei constantem Volumen, nach *Laplace* . . . . $\mathfrak{C} = 0{\cdot}1686$
Vermittelst dieser Zahlen folgt aus (15):

$$k = 424$$

und dieser numerische Werth für das mechanische Aequivalent einer Wärmeeinheit stimmt vollkommen mit demjenigen überein, welchen *Person* gefunden hat.

Leider sind die Werthe von $\mathfrak{C}$ für andere Gase noch nicht zuverlässig bestimmt. Wäre dies der Fall, so müsste die Gleichung (15), wenn sie richtig ist, für k immer den gleichen Werth liefern, für welches Gas man auch die Rechnung machen möchte.

So weit überhaupt das Gay-Lussac'sche und Mariott'sche Gesetz richtig ist, gelten nun nach unseren Untersuchungen für Gase folgende Resultate:

$$\left.\begin{aligned} N V &= N_0 V_0 (1 + \alpha t) \\ k &= \frac{N_0 \alpha}{s_0 (\mathfrak{G}_1 - \mathfrak{G})} \\ d W &= Q \mathfrak{G} \, d t + \frac{N_0 V_0 (1 + \alpha t)}{k} \frac{d V}{V} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Sie gelten jedoch nur, wenn die Ausdehnung und Erwärmung so langsam erfolgt, dass keine Schwingungen in den Körperatomen eintreten.

AUSDEHNUNG EINES GASES OHNE WÄRMEAUFNAHME.

Poisson hat in seiner Mechanik, Tome II, pag. 647, die Gesetze zu bestimmen gesucht, nach welchen sich die Spannkraft und Temperatur eines Gases ändert, wenn dasselbe eine Volumsänderung erleidet, ohne dabei Wärme aufzunehmen oder abzugeben. Diese Gesetze ergeben sich ganz einfach durch rein analytische Operationen aus den aufgestellten Gleichungen (17). Es ist nämlich in diesem Falle $d W = o$ zu setzen; demnach hat man vermöge der dritten der Gleichungen (17):

$$o = Q \mathfrak{G} \, d t + \frac{N_0 V_0}{k} (1 + \alpha t) \frac{d V}{V}$$

Hieraus folgt:

$$o = Q \mathfrak{G} \frac{d t}{1 + \alpha t} + \frac{N_0 V_0}{k} \frac{d V}{V}$$

Das Integrale dieser Gleichung ist:

$$\text{Const.} = \frac{Q \mathfrak{G}}{\alpha} \text{ lognat. } (1 + \alpha t) + \frac{N_0 V_0}{k} \text{ lognat. } V$$

Bezeichnen wir für den Anfangszustand der Ausdehnung durch:

$$t_1 \qquad V_1 \qquad \gamma_1 \qquad N_1$$

für den Endzustand der Ausdehnung durch:

$$t_2 \qquad V_2 \qquad \gamma_2 \qquad N_2$$

die Temperatur, das Volumen, die Dichte und die Pressung des Gases, so hat man:

$$\text{Const.} = \frac{Q \mathfrak{G}}{\alpha} \text{ lognat. } (1 + \alpha t_1) + \frac{N_0 V_0}{k} \text{ lognat. } V_1$$

$$\text{Const.} = \frac{Q \mathfrak{G}}{\alpha} \text{ lognat. } (1 + \alpha t_2) + \frac{N_0 V_0}{k} \text{ lognat. } V_2$$

Die Differenz dieser Gleichung gibt:

$$o = \frac{Q\mathfrak{C}}{\alpha} \text{ lognat. } \frac{1+\alpha t_1}{1+\alpha t_2} + \frac{N_0 V_0}{k} \text{ lognat. } \frac{V_1}{V_2}$$

hieraus folgt:

$$\frac{1+\alpha t_2}{1+\alpha t_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{N_0 V_0 \alpha}{k Q \mathfrak{C}}}$$

oder wenn wir berücksichtigen, dass überhaupt $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ und dass vermöge der zweiten der Gleichungen (17)

$$\frac{N_0 V_0 \alpha}{k Q \mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}} - 1$$

ist, so wird:

$$\frac{1+\alpha t_2}{1+\alpha t_1} = \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^{\frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Nun ist aber auch vermöge des Mariott'schen und Gay-Lussac'schen Gesetzes:

$$\frac{1+\alpha t_2}{1+\alpha t_1} = \frac{N_2 V_2}{N_1 V_1} = \frac{N_2 \gamma_1}{N_1 \gamma_2}$$

demnach erhält man auch:

$$\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^{\frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}} - 1} = \frac{N_2}{N_1} \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

oder

$$\frac{N_2}{N_1} = \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^{\frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

und diese Gleichungen (18 und 19) sind identisch mit den von *Poisson* gefundenen; sie gelten jedoch nur so weit das Mariott'sche und Gay-Lussac'sche Gesetz zulässig ist. Ich habe diese von *Poisson* zuerst aufgestellten Gesetze in der Theorie der calorischen Maschine angewendet, und das potenzirte Mariott'sche Gesetz genannt.

Für atmosphärische Luft ist nach den früher angegebenen Werthen von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_1$:

$$\frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}} = 1{\cdot}41$$

$$\frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}} - 1 = 0{\cdot}41$$

und diese Werthe stimmen ebenfalls nahe genug mit jenen überein, welche *Poisson* annimmt.

BERECHNUNG EINER GESCHLOSSENEN CALORISCHEN MASCHINE.

Eine Luftmenge Q habe zuerst eine Temperatur t_1, ein Volumen V_1 und eine Spannkraft N_1. Sie werde hierauf ohne Volumenänderung auf t_2 erwärmt, wodurch sie eine Spannkraft N_2 gewinnt. Sie dehne sich hierauf aus, ohne von aussen Wärme aufzunehmen, oder nach aussen Wärme abzugeben, bis ihr Volumen V_2, ihre Temperatur t_3 und die Spannkraft N_3 wird. Nun werde sie ohne Volumenänderung abgekühlt, indem ihr durch einen Regenerator Wärme entzogen wird, bis eine Temperatur t_4 und Spannkraft N_4 entsteht. Endlich werde sie wiederum zusammengedrückt bis auf ihr ursprüngliches Volumen, und dabei soll zuletzt wiederum die Temperatur t_1 und Spannkraft N_1 eintreten, die am Anfang dieses ganzen Vorgangs vorhanden waren.

Es ist nun die Frage, wie stark die Abkühlung ist, welche durch den Regenerator bewirkt werden muss, damit der Endzustand der Luft mit dem Anfangszustand übereinstimmt, und welche Arbeit durch diesen Akt nach aussen hin übertragen wird.

Es sei V_0 das Volumen der Luftmenge Q bei 0° Temperatur und unter einem äusseren Druck N_0.

Nach dem gewöhnlichen Mariott'schen und Gay-Lussac'schen Gesetz ist :

$$N_1 V_1 = N_0 V_0 (1 + \alpha t_1)$$

$$N_2 V_1 = N_0 V_0 (1 + \alpha t_2)$$

demnach :

$$N_2 - N_1 = \frac{N_0 V_0 \alpha}{V_1} (t_2 - t_1) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

Es ist ferner für die Akte der Ausdehnung und Zusammendrückung der Luft, für welche das potenzirte Mariott'sche Gesetz gilt :

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{N_2}{N_3} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\lambda} & \frac{1+\alpha t_2}{1+\alpha t_3} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\lambda-1} \\ \frac{N_1}{N_4} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\lambda} & \frac{1+\alpha t_1}{1+\alpha t_4} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\lambda-1} \end{array}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots (21)$$

wobei $\lambda = \frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{G}}$ das Verhältniss der empirischen Wärmecapazitäten ausdrückt. Aus den rechtsstehenden der Gleichungen (21) folgt :

$$t_3 - t_4 = (t_2 - t_1) \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\lambda - 1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

Bezeichnet man durch k die Arbeit, welche einer Wärmeeinheit entspricht, und mit A die Wirkung, die durch den ganzen cyclischen Vorgang gewonnen wird, so ist :

$$A = k\, Q\, \mathfrak{G} \left[t_2 - t_1 - (t_3 - t_4) \right]$$

oder wegen (22):

$$A = k\,Q\,\mathfrak{G}\left(t_2 - t_1\right)\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\lambda - 1}\right]$$

oder weil

$$k = \frac{N_0\,V_0\,\alpha}{Q\,(\mathfrak{G}_1 - \mathfrak{G})} = \frac{N_0\,V_0\,\alpha}{Q\,\mathfrak{G}\,(\lambda - 1)}$$

ist:

$$A = \frac{N_0\,V_0\,\alpha}{(\lambda - 1)}\,(t_2 - t_1)\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\lambda - 1}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Die Gleichung (22) bestimmt die Abkühlung, welche der Regenerator hervorbringen muss, damit der Endzustand des Gases mit dem Anfangszustand übereinstimmt, und die Gleichung (23) bestimmt die Arbeit, die durch den cyclischen Akt gewonnen wird. Es sei z. B. für atmosphärische Luft:

$V_0 = 1$ Kubikmeter	$t_1 = 100$
$N_0 = 10334$	$t_2 = 300^\circ$
$\alpha = 0{\cdot}00367$	$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{5}$
$\lambda = \frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{G}} = 1{\cdot}41$	

so findet man:

$$A = 8593 \text{ Kilg. Meter}$$

$$t_2 - t_3 = 103^\circ$$

Abgesehen vom Wärmeverlust, vom Reibungswiderstande und überhaupt von allen Unvollkommenheiten, die mit der Realisirung einer jeden Maschine verbunden sind, würde diese berechnete Maschine, wenn der cyclische Akt in jeder Sekunde einmal wiederholt würde, einen Effekt von ungefähr 100 Pferdekräften geben, und der Maschinencylinder würde wegen der fünffachen Ausdehnung eine Grösse von circa 6 Kubikmetern erhalten, also ungefähr fünfmal so gross werden als der Cylinder einer gewöhnlichen Dampfmaschine von 100 Pferdekraft. Darin liegt das Grundübel dieser calorischen Maschinen, und so lange es nicht gelingt, einen Akt zu entdecken, durch welchen die Umwandlung des Schwingungszustandes des Aethers in mechanische Wirkungen in viel ergiebigerer Weise geschehen kann als durch Volumsänderungen oder Expansionen, werden die calorischen Maschinen die gewöhnlichen Dampfmaschinen nicht zu verdrängen im Stande sein.

AUSDEHNUNG EINES GASES BEI GLEICHZEITIGER ERWÄRMUNG DESSELBEN DURCH DIE WÄNDE DES GEFÄSSES.

Nehmen wir an, eine gewisse Gasmenge sei in einem Gefäss eingeschlossen, dessen Volumen sich vergrössert, und durch dessen Wände Wärme (Aetherschwingungen) eindringt. Es ist nun die Frage, nach welchem Gesetz Spannkraft und Temperatur sich ändern. Nehmen wir an, das Gefäss sei ein Cylinder mit einem beweglichen Kolben. Es sei A der Querschnitt des Cylinders, B der Umfang desselben, x die Entfernung des Kolbens vom Boden in einem bestimmten Zeitangenblick der Bewegung des Kolbens. Dann ist in diesem Augenblick $A\,x$ das Gasvolum, $A + B\,x$ die Fläche, durch welche Wärme eindringt. Nennen wir T die Temperatur ausserhalb des Cylinders, t die Temperatur des Gases, wenn der Kolben vom Boden um x entfernt ist, dann können wir die in einem Zeitelement $d\,z$ in den Cylinder eindringende Wärmemenge durch $\lambda\,(T-t)\,(A + B\,x)\,d\,z$ ausdrücken, wobei λ den Wärmedurchgangscoefficienten bezeichnet.

Wir werden nun die Zustände des Gases kennen lernen, wenn wir in die Gleichung 17, Seite 44 setzen:

für	$d\,W$	$\lambda\,(T-t)\,(A+B\,x)\,d\,z$
„	$d\,V$	$A\,d\,x$

und finden daher:

$$\lambda\,(T-t)\,(A+B\,x)\,d\,z = Q\,\mathfrak{G}\,d\,t + \frac{N_0\,V_0}{k}\,(1+\alpha\,t)\,\frac{d\,x}{x}$$

Diese Gleichung kann erst dann integrirt werden, wenn das Bewegungsgesetz des Kolbens als Funktion der Zeit bekannt ist. Nehmen wir die einfachste, nämlich eine gleichförmige Bewegung des Kolbens an, so können wir setzen:

$$x = a + b\,z$$

$$\text{demnach}\quad d\,x = b\,d\,z$$

und obige Gleichung wird dann:

$$\lambda\,(T-t)\,(A+B\,x)\,\frac{d\,x}{b} = Q\,\mathfrak{G}\,d\,t + \frac{N_0\,V_0}{k}\,(1+\alpha\,t)\,\frac{d\,x}{x}$$

Das Integrale dieser Differenzialgleichung ist:

$$t = x^{-\frac{N_0\,V_0\,\alpha}{k\,\mathfrak{G}\,Q}}\;e^{-\frac{\lambda}{b\,\mathfrak{G}\,Q}\left(A\,x + \frac{1}{2}\,B\,x^2\right)}$$

$$\times \left|\,\text{const.} + \int\left(\frac{\lambda\,T}{b\,\mathfrak{G}\,Q}\,(A+B\,x) - \frac{N_0\,V_0}{k\,\mathfrak{G}\,Q}\,\frac{1}{x}\right)\,e^{\frac{N_0\,V_0\,\alpha}{k\,\mathfrak{G}\,Q}}\;e^{\frac{\lambda}{b\,\mathfrak{G}\,Q}\left(A\,x + \frac{1}{2}\,B\,x^2\right)}\,d\,x\,\right|$$

Hieraus sieht man, wie complizirt die Vorgänge in einer calorischen Maschine sind, wenn die Erwärmungen des Gases durch die Wände des Expansionscylinders erfolgen.

DAMPFBILDUNG.

Wenn eine Flüssigkeit, z. B. Wasser in einem Dampfkessel, zum Verdampfen gebracht wird, ist der innere Vorgang folgender:

Zuerst müssen die Dynamiden so weit von einander entfernt werden, bis die Repulsivkraft der Attraktivkraft das Gleichgewicht hält, hierauf müssen die Dynamiden noch weiter entfernt werden, bis sie mit einer Kraft aus einander zu gehen streben, die der im Kessel herrschenden Spannung entspricht. Bis zu diesem Augenblick hin ist durch den Vorgang Arbeit consumirt worden. Nun aber wird die Repulsivkraft der Dynamiden vorherrschend und grösser als die Dampfspannung, die Dynamiden entfernen sich noch weiter von einander, bis sie zuletzt noch einmal mit einer der Dampfspannung entsprechenden Kraft aus einander zu gehen streben. Während dieses Ausdehnungsaktes wird Arbeit entwickelt; allein während des totalen Ausdehnungsaktes muss der äussere Dampfdruck überwunden werden, wird also wiederum Arbeit consumirt.

Nennen wir nun:

p die Spannung des entstehenden Dampfes, d. h. den Druck des Dampfes im Kessel auf 1 Quadratmeter;

t_0 die Temperatur des Wassers, aus welchem der Dampf entsteht;

V_0 das ursprüngliche Volumen von 1 Kilogramm Wasser bei t_0 Grad Temperatur;

V_1 das Volumen des Dampfes in seinem Entstehungsmoment, d. h. in dem Augenblick, wenn die Abstossung der Dynamiden ihrer Anziehung gleich geworden ist;

V das Volumen, das der aus V_0 Wasser entstandene Dampf bei der Spannung p einnimmt;

1 die Wärmecapazität des Wassers;

c die Wärmecapazität des entstandenen Dampfes;

t die Temperatur des entstandenen Dampfes;

W die Wärmemenge, welche zur Bildung von 1 Kilogramm Dampf von der Spannung p und Temperatur t erforderlich ist;

l die lebendige Kraft, welche dem Schwingungszustand der verschwundenen Aethermenge $1 - c$ entspricht;

L die lebendige Kraft, welche den Schwingungen der Körperatome des Dampfes entspricht.

Bezeichnen ferner durch

$\boxed{V_1 V_0}$ die Arbeit, welche erforderlich ist, um das Wasser bis zum Entstehungspunkt auszudehnen;

$\boxed{V V_1}$ die Arbeit, welche der Dampf entwickelt, während er sich vom Entstehungspunkt an so weit ausdehnt, bis seine Spannkraft zum zweiten Male gleich p wird;

$p\,(V - V_0)$ die Arbeit, welche der Ueberwindung des äusseren Druckes entspricht;

so hat man offenbar folgende Beziehung:

$$W = c\,t + l - t_0 + \boxed{V_1 V_0} + p\,(V - V_0) - \boxed{V V_1} + L$$

oder:

$$W = \boxed{V_1 V_0} + c\,t - t_0 + l + L + p(V - V_0) - \boxed{V V_1}$$

Nun ist $\boxed{V_1 V_0}$ für eine bestimmte Flüssigkeit eine absolute Constante; setzen wir also:

$$\boxed{V_1 V_0} = A$$

so wird:

$$W = A + c\,t - t_0 + \left[l + L + p\,(V - V_0) - \boxed{V V_1} \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Nach *Regnault's* Versuchen kann die zur Dampfbildung erforderliche Wärmemenge ausgedrückt werden durch den Ausdruck:

$$W = 606{\cdot}5 + 0{\cdot}305\,t - t_0$$

Dieser Ausdruck würde mit dem vorhergehenden übereinstimmen, wenn

$$A = 606{\cdot}5 \qquad\qquad c = 0{\cdot}305$$

$$\boxed{V V_1} = l - L - p(V - V_0)$$

ist.

Nach meiner Theorie wäre c die Wärmecapazität des Dampfes bei constantem Volumen. Nun hat *Regnault* für die Wärmecapazität des Wasserdampfes bei constantem Druck gefunden $C_1 = 0{\cdot}4750$.

Nach dem Seite 44 für Gase gefundenen Ausdruck ist aber:

$$C_1 - c = \frac{N_0\,\alpha}{s\,k}$$

Nun ist:

$N_0 =$	10334	Druck der Atmosphäre auf 1 Quadratmeter
$\alpha =$	0·00367	Ausdehnungs-Coeffizient
$s =$	0·5913	Gewicht von 1 Kilg. Dampf von 1 Atmosph. Spannung
$k =$	424	

Hieraus folgt:

$$C_1 - c = 0{\cdot}151$$

demnach:

$$c = 0{\cdot}475 - 0{\cdot}1514 = 0{\cdot}3236$$

Es scheint also wirklich, dass der Coeffizient 0·305, welchen *Regnault* „une capacité calorifique particulière de la vapeur“ nennt, nichts anderes ist, als die Wärmecapazität des Dampfes bei constantem Volumen.

Man kann nun mit Wahrscheinlichkeit folgende Sätze aussprechen:

1. die Arbeit, welche erforderlich ist, um 1 Kilogramm Wasser von 0° Temperatur so weit auszudehnen, bis die Anziehung und Abstossung der Dynamiden gleich gross werden, entspricht einer Wärmemenge von 606·5 Wärmeeinheit;
2. die spezifische Wärme des Dampfes bei constantem Druck beträgt 0·4750;
3. die spezifische Wärme bei constantem Volumen beträgt 0·305;
4. die Arbeit, welche der Dampf entwickelt, indem er sich von seinem Entstehungspunkt an bis zur Spannung p ausdehnt, wird consumirt: a) durch die Ueberwältigung des äusseren Dampfdruckes, während das Wasser von Volumen v_0 in Dampf von einem Volumen v übergeht, b) durch Körperschwingungen, welchen eine lebendige Kraft L entspricht, c) durch Aetherschwingungen in dem entweichenden Aether;
5. bei Bildung von 1 Kilogramm Dampf entweicht $1 - 0·305 = 0·695$ Aether. (Die Aethermenge, welche 1 Kilogramm Wasser enthält, gleich 1 gesetzt).

ZWEITER ABSCHNITT.

Ueber das Gleichgewicht eines Dynamidensystems.

WECHSELWIRKUNG ZWEIER DYNAMIDEN.

Eine mathematisch genaue Berechnung der Wechselwirkung zweier Dynamiden, mit Berücksichtigung der Gestalten der Kerne und der Aethergruppirung in den Dynamiden ist mit unüberwindlichen Schwierigkeiten verbunden; wir müssen uns also mit einer Annäherung begnügen. Wir nehmen an: 1) die Entfernung der Dynamiden sei sehr gross nicht nur im Verhältniss zu den Dimensionen der Kerne, sondern selbst im Verhältniss zu den Dimensionen der Hüllen. Unter dieser Voraussetzung begehen wir keinen merklichen Fehler, wenn wir bei der Berechnung der Wechselwirkung die Kerne der Dynamiden wie materielle Punkte behandeln. 2) Die Aetherhüllen seien von kubischer Gestalt, und die Atome seien in denselben gleichförmig dicht gruppirt. Das ist in der Natur nicht möglich, aber gleichwohl werden wir auch durch diese Annahme, wenn die Entfernung der Dynamiden sehr gross ist, keinen merklichen Fehler begehen, weil überhaupt unter dieser Voraussetzung die Anziehung von der Gestalt der Hüllen und von der Gruppirung des Aethers beinahe nicht abhängt.

Es seien Fig. 7:

A und A_1 die Schwerpunkte der Kerne der beiden Dynamiden, deren Wechselwirkung berechnet werden soll;

$\overline{A A_1} = r$ die Entfernung der Schwerpunkte der Dynamiden;

a ein Aetheratom der Dynamide von A;

a_1 ein Aetheratom der Dynamide von A_1;

$\left.\begin{array}{l} A\,a = \varrho \\ A_1 a_1 = \varrho_1 \end{array}\right\}$ die Entfernungen dieser Aetheratome von ihren Kernen;

m die Masse des Kernes der Dynamide A;

m_1 die Masse des Kernes der Dynamide A_1;

μ die Masse jedes Aetheratoms der Hüllen von A;

μ_1 die Masse jedes Aetheratoms der Hüllen von A_1.

Diese Massen μ und μ_1, so wie auch m und m_1 sind zwar gleich gross, es ist jedoch für die Rechnung angemessen, sie so zu behandeln, als wären sie ungleich.

Fällen wir von a und a_1 auf die Richtung der Verbindungslinie von A und A_1 die Perpendikel a b $a_1 b_1$ und setzen $\overline{A\,b} = x$ $\overline{A_1\,b_1} = x_1$. Die Wechselwirkungen zweier Atome sind gewisse Funktionen ihrer Entfernungen, die wir durch die Symbole F ( ) G ( ) J ( ) bezeichnen wollen. Ersteres bezieht sich auf die Wechselwirkung zweier Körperatome; das zweite auf die Wechselwirkung zwischen einem Körperatom und einem Aetheratom; das dritte auf die Wechselwirkung zweier Aetheratome.

Die totale Wechselwirkung der Dynamiden können wir durch $m\,m_1\,f(r)$ ausdrücken.

Dies vorausgesetzt, und die Eingangs ausgesprochene Annahme berücksichtigend, kann man nun mit ziemlicher Genauigkeit schreiben :

$$m\,m_1\,f(r) = \Sigma\Sigma\,\mu\,\mu_1\,J(r + x_1 - x) - m\,m_1\,F(r) - \Sigma\,m\,\mu_1\,G(r + x_1) - \Sigma\,m_1\,\mu\,G(r - x) \qquad (1)$$

wobei $\Sigma\Sigma$ Summenzeichen sind, die sich auf sämmtliche Aetheratome der Hüllen beziehen. Die abstossenden Kräfte sind positiv, die anziehend wirkenden sind negativ in Rechnung gebracht. Fällt der Werth des ganzen Ausdruckes rechter Hand des Gleichheitszeichens positiv aus, so ist die Wechselwirkung $m\,m_1\,f(r)$ eine Abstossung; fällt jener Ausdruck negativ aus, so ist die Wechselwirkung $m\,m_1\,f(r)$ eine Anziehung.

Da wir voraussetzen, dass die grössten Werthe von x und x_1 gegen r sehr klein sind, so dürfen wir vermöge des Taylor'schen Satzes schreiben :

$$J(r + x_1 - x) = J(r) + \frac{d\,J(r)}{dr}(x_1 - x) + \frac{1}{2}\frac{d^2 J(r)}{dr^2}(x_1 - x)^2$$

$$G(r + x_1) = G(r) + \frac{d\,G(r)}{dr}x_1 + \frac{1}{2}\frac{d^2 G(r)}{dr^2}x_1^2$$

$$G(r - x) = G(r) - \frac{d\,G(r)}{dr}x + \frac{1}{2}\frac{d^2 G(r)}{dr^2}x^2$$

demnach auch :

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma\Sigma\,\mu\,\mu_1\,J(r + x_1 - x) &= J(r)\,\Sigma\Sigma\,\mu\,\mu_1 + \frac{d\,J(r)}{dr}\,\Sigma\Sigma\,\mu\,\mu_1\,(x_1 - x) \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{d^2 J(r)}{dr^2}\,\Sigma\Sigma\,\mu\,\mu_1\,(x_1 - x)^2 \\
\Sigma\,m\,\mu_1\,G(r + x_1) &= G(r)\,\Sigma\,m\,\mu_1 + \frac{d\,G(r)}{dr}\,\Sigma\,m\,\mu_1\,x_1 \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{d^2 G(r)}{dr^2}\,\Sigma\,m\,\mu_1\,x_1^2 \\
\Sigma\,m_1\,\mu\,G(r - x) &= G(r)\,\Sigma\,m_1\,\mu - \frac{d\,G(r)}{dr}\,\Sigma\,m_1\,\mu\,x \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{d^2 G(r)}{dr^2}\,\Sigma\,m_1\,\mu\,x^2
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (2)$$

Bezeichnen wir durch q das Atomgewicht und durch c die Wärmecapazität des Stoffes, so ist vermöge (6), Seite 32:

$$\Sigma \mu = \Sigma \mu_1 = q c \mu$$

Da wir ferner annehmen dürfen, dass sich die Kerne im Massenmittelpunkt der Aetherhülle befinden, so ist:

$$\Sigma \mu x = \Sigma \mu_1 x_1 = 0$$

Daher werden die Ausdrücke (2):

$$\left.\begin{aligned} \Sigma \Sigma \mu \mu_1 J(r - x_1 - x) &= q^2 c^2 \mu^2 J(r) - \frac{1}{2} \frac{d^2 J(r)}{dr^2} \Sigma \Sigma \mu \mu_1 (x^2 - x_1^2) \\ \Sigma m \mu_1 G(r - x_1) &= m q c \mu G(r) - \frac{m}{2} \frac{d^2 G(r)}{dr^2} \Sigma \mu_1 x_1^2 \\ \Sigma m_1 \mu G(r - x) &= m_1 q c \mu G(r) - \frac{m_1}{2} \frac{d^2 G(r)}{dr^2} \Sigma \mu x^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (3)$$

Diese Summe rechter Hand des Gleichheitszeichens können wir ausrechnen, weil wir eine kubische Form der Aetherhüllen und eine gleichmässig dichte Gruppirung der Aetheratome innerhalb der Hüllen vorausgesetzt haben.

Nennen wir D die Seite von diesem Kubus, e die Entfernung zweier unmittelbar neben einander befindlichen Aetheratome, und stellen wir uns auch noch vor, dass die Aetheratome nach geradlinigen Reihen gelagert sind, wie Fig. 8 andeutet, so ist:

$\frac{D}{e}$ die Anzahl der Aetheratome einer Reihe;

$\left(\frac{D}{e}\right)^2$ die Anzahl der Aetheratome einer Schichte;

$\left(\frac{D}{e}\right)^3 = q c$ die Anzahl der Aetheratome einer ganzen Hülle.

und es ist ferner sehr nahe:

$$\Sigma \mu x^2 = 2 \mu \left(\frac{D}{e}\right)^2 \left| e^2 + 4 e^2 + 9 e^2 + \ldots\ldots \left(\frac{D}{2e}\right)^2 e^2 \right|$$

$$= 2 \mu D^2 \left[1 + 4 + 9 + \ldots\ldots \left(\frac{D}{2e}\right)^2 \right]$$

$$= 2 \mu D^2 \frac{\frac{D}{2e}\left(\frac{D}{2e} + 1\right)\left(\frac{D}{e} + 1\right)}{6}$$

oder weil die Einheit sowohl gegen $\frac{D}{2e}$ als auch gegen $\frac{D}{e}$ vernachlässigt werden kann:

$$\Sigma \mu x^2 = \frac{\mu D^5}{12 e^3} = \frac{\mu D^2}{12}\left(\frac{D}{e}\right)^3 = \frac{\mu c q D^2}{12}$$

Eben so ist auch :

$$\Sigma \mu_1 x_1^2 = \frac{\mu c q D^2}{12} \qquad (4)$$

und endlich finden wir :

$$\Sigma\Sigma \mu \mu_1 (x^2 + x_1^2) = \Sigma\Sigma \mu \mu_1 x^2 + \Sigma\Sigma \mu \mu_1 x_1^2$$

$$= 2 c q \mu \frac{c q \mu}{12} D^2$$

$$= \frac{1}{6} c^2 q^2 \mu^2 D^2 \qquad (5)$$

Führt man diese Rechnungsresultate (4) und (5) in (3) ein, so erhält man :

$$\left.\begin{array}{ll} \Sigma\Sigma \mu \mu_1 \, J(r + x_1 - x) & = c^2 q^2 \mu^2 \left[J(r) + \frac{1}{12} \frac{d^2 J(r)}{d r^2} D^2 \right] \\ \Sigma m \mu_1 \, G(r + x_1) & = m c q \mu \left[G(r) + \frac{1}{24} \frac{d^2 G(r)}{d r^2} D^2 \right] \\ \Sigma m_1 \mu \, G(r - x) & = m_1 c q \mu \left[G(r) + \frac{1}{24} \frac{d^2 G(r)}{d r^2} D^2 \right] \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Führt man endlich diese Resultate (5) in die Gleichung (1) ein, so findet man :

$$m m_1 f(r) = \left\{ \begin{array}{l} c^2 q^2 \mu^2 J(r) - 2 m c q \mu G(r) - m m_1 F(r) \\ + \frac{c q \mu}{12} \left[c q \mu \frac{d^2 J(r)}{d r^2} - m \frac{d^2 G(r)}{d r^2} \right] D^2 \end{array} \right\} \qquad (6)$$

Bezeichnet man, wie üblich, mit g die Beschleunigung durch die Schwere beim freien Fall der Körper, so ist :

$$m = m_1 = \frac{q}{2 g}$$

setzt man ferner :

$$2 g \mu c = C$$

so bedeutet C eine der Wärmecapazität proportionale Grösse, und man findet mit Berücksichtigung derselben aus (6) :

$$f(r) = C^2 J(r) - 2 C G(r) - F(r) + \frac{C}{12} \left[C \frac{d^2 J(r)}{d r^2} - \frac{d^2 G(r)}{d r^2} \right] D^2 \qquad (7)$$

Dies ist die mysteriöse Funktion, welche *Cauchy* seinen Untersuchungen über das einfache Medium zu Grunde legt. Dieselbe besteht theils aus positiven, theils aus negativen Gliedern; ihr Betrag kann daher je nach Umständen positiv oder negativ ausfallen.

Ist $f(r)$ positiv, so ist die Wechselwirkung der Dynamiden eine Abstossung; ist $f(r)$ negativ, so ist diese Wechselwirkung eine Anziehung.

Diese Wechselwirkung hängt nicht blos von der Entfernung r der Dynamidenkerne, sondern auch von der in der Gewichtseinheit des Stoffes enthaltenen Aethermasse oder von der Wärmecapazität des Stoffes, und endlich auch noch von der Temperatur des Stoffes ab; denn im schwingenden Zustand des Aethers sind die Hüllen grösser, ist also D grösser als im ruhigen Zustand. Freilich begehen wir abermals einen kleinen Fehler, wenn wir den Ausdruck (7) auch für den Fall gelten lassen, wenn sich der Aether im schwingenden Zustand befindet, allein es ist aus der Natur der Sache herauszufühlen, dass dieser Fehler von keinem Belang sein kann. Die Wechselwirkung zweier Dynamiden verschwindet, wenn $f(r) = 0$ wird, und dies ist der Fall für:

$$D_1^2 = \frac{12}{C} \frac{F(r) + 2\,C\,G(r) - C^2 J(r)}{C \frac{d^2 J(r)}{d r^2} - \frac{d^2 G(r)}{d r^2}} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (8)$$

Da wir voraussetzen, dass die Funktionen $J(r)$ $G(r)$ $F(r)$ mit dem Wachsen von r äusserst rasch abnehmen, so sind die zweiten Differenzialquotienten dieser Funktionen im Verhältniss zu den Funktionen selbst sehr kleine Grössen; man wird sich also für gewisse Rechnungen erlauben dürfen, das mit D^2 multiplizirte Glied des Ausdruckes (7) ganz zu vernachlässigen, und dann wird:

$$f(r) = C^2 J(r) - 2\,C\,G(r) - F(r) \quad \dots\dots\dots\dots \quad (9)$$

GLEICHGEWICHT EINES NACH ALLEN RICHTUNGEN GLEICH ELASTISCHEN (ISOTROPEN) DYNAMIDEN-SYSTEMS.

Denken wir uns, ein nach allen Richtungen gleich elastisches Dynamidensystem befinde sich unter der Einwirkung eines äusseren Druckes im Gleichgewicht, und suchen wir die Bedingungen dieses Gleichgewichtes auszumitteln.

Wir lassen alle Bezeichnungen, die wir in der vorhergehenden Untersuchung gewählt haben, auch hier gelten, und bezeichnen noch durch N den äusseren auf Compression wirkenden Druck, der auf jede Flächeneinheit der Oberfläche des Systems ausgeübt wird.

Wenden wir auf dieses im Gleichgewicht befindliche Dynamidensystem das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit an, so müssen wir in dem System eine den Zusammenhang desselben nicht aufhebende Verschiebung vornehmen. Da aber alle Atome vollkommen frei beweglich sind, so können wir mit jedem derselben eine ganz beliebige unendlich kleine Verschiebung vornehmen, es ist daher auch erlaubt, solche Verschiebungen eintreten zu lassen, die einer gleichmässigen Ausdehnung der ganzen Masse entsprechen, ohne dabei in den Aetherhüllen Verschiebungen der Aetheratome gegen die Kerne vorzunehmen.

Nennen wir λ die unendlich kleine Distanzänderung zweier Punkte, deren Entfernung gleich der Längeneinheit ist, so ist λr die Distanzänderung von r, demnach $\lambda r m^2 f(r)$ die virtuelle Arbeit, welche der Distanzänderung zweier Dynamiden entspricht, und

$$\lambda m^2 S r f(r) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

die Summe der virtuellen Arbeiten, welche durch die Distanzänderungen aller Dynamiden von einer bestimmten Dynamide entwickelt wird. Da $f(r)$ für alle Werthe von r verschwindet, die grösser sind, als der Radius der Wirkungssphäre, so ist es auch genügend, wenn man die Summe S nur allein auf die innerhalb einer Wirkungssphäre befindlichen Dynamiden ausdehnt. Nennen wir Q das totale Gewicht des Körpers, q das Atomengewicht der Substanz, so ist $\frac{Q}{q}$ die Anzahl der im Körper enthaltenen Dynamiden. Die totale Summe aller virtuellen Arbeiten, welche der gesammten Ausdehnung entspricht, ist daher annähernd:

$$\frac{1}{2} \frac{Q}{q} \lambda m^2 S r f(r) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Ich sage annähernd, weil für diejenigen Dynamiden, deren Entfernung von der Oberfläche kleiner ist, als der Radius einer Wirkungssphäre, nicht genau das Gleiche gilt, was für die innern Dynamiden richtig ist. Der Faktor $\frac{1}{2}$ rührt daher, weil durch die Multiplikation von (1) mit $\frac{Q}{q}$ jede virtuelle Arbeit zweimal in Rechnung gebracht wird, während sie doch nur einmal in Rechnung gebracht werden darf.

Nun ist, wenn wir das ganze Volumen mit V bezeichnen, $3 \lambda V$ die Volumsänderung desselben, demnach:

$$3 \lambda V N$$

die virtuelle Arbeit, welche den äusseren Kräften entspricht. Nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit hat man daher:

$$3 \lambda V N = \frac{1}{2} \frac{Q}{q} \lambda m^2 S r f(r)$$

oder:

$$N V = \frac{1}{6} \frac{Q m^2}{q} S r f(r) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

und wenn man für $f(r)$ den Werth setzt, den die vorhergehende Untersuchung geliefert hat, und berücksichtigt, dass $m = \frac{q}{2 g}$ ist:

$$N V = \frac{Q q}{24 g^2} \left\{ \begin{array}{l} C^2 S r J(r) - 2 C S r G(r) - S r F(r) \\ + \frac{C}{12} \left[C S r \frac{d^2 J(r)}{d r^2} - S r \frac{d^2 G(r)}{d r^2} \right] D^2 \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

oder auch, wenn wir $\frac{q}{2\,g} = m$ in die Summenzeichen nehmen und die Masse aller Körperatome mit M bezeichnen, also $M = \frac{Q}{2\,g}$ setzen:

$$N\,V = \frac{1}{6}\,M \left\{ \begin{array}{l} C^2 S\,m\,r\,J(r) - 2\,C\,S\,m\,r\,G(r) - S\,m\,r\,F(r) \\ + \frac{C}{12}\left[C\,S\,m\,r\,\frac{d^2 J(r)}{d\,r^2} - S\,m\,r\,\frac{d^2 G(r)}{d\,r^2} \right] D^2 \end{array} \right\}$$

Oder endlich, wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(r) = C^2 S\,m\,r\,J(r) - 2\,C\,S\,m\,r\,G(r) - S\,m\,r\,F(r) \\ \psi(r) = \frac{C}{12}\left[C\,S\,m\,r\,\frac{d^2 J(r)}{d\,r^2} - S\,m\,r\,\frac{d^2 G(r)}{d\,r^2} \right] \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

$$N\,V = \frac{1}{6}\,M\left[\varphi(r) + \psi(r)\,D^2\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

DAS MARIOTTSCHE GESETZ.

Wir wollen nun verschiedene Gleichgewichtszustände, in welche ein Körper gebracht werden kann, mit einander vergleichen, und um von diesen Zuständen bequem sprechen zu können, nenne ich denjenigen Zustand, der in den Körper eintritt, wenn kein äusserer Druck wirkt und der Aether in den Hüllen absolut ruhig ist, also die rationelle Null-Temperatur vorhanden ist: den Nullzustand. Andere Zustände, bei welchen Aetherschwingungen (Temperaturen) vorhanden und äussere Pressungen wirksam sind, bezeichne ich mit I II... und versehe die Grössen, welche sich auf diese Zustände beziehen, mit Zahlen 1 2....

Da die Grösse D, d. h. der Durchmesser einer Aetherhülle sowohl von dem äussern Druck als auch von dem Schwingungszustand, folglich von der Temperatur abhängt, so ändert sich dieselbe bei dem Uebergang von einem Zustand in einen andern; allein ich bin nicht im Stande, diese Abhängigkeit auf rationellem Wege durch Rechnung zu bestimmen, und sehe mich gezwungen, hinsichtlich des Werthes von D oder von D^2 eine naturgemäss scheinende Annahme oder Hypothese zu machen. Ich setze für irgend einen Zustand I

$$D_1^2 = D_0^2\,(1 - f\,\varkappa_1 + h\,T_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

wobei die in diesem Ausdruck erscheinenden Grössen folgende Bedeutung haben:

- D_0 der Durchmesser einer Aetherhülle, wenn der Aether in absoluter Ruhe ist, und auf den Körper kein äusserer Druck wirkt, d. h. D_0 ist der Durchmesser einer Hülle im Nullzustand des Körpers;
- T_1 die rationelle Temperatur, welche der im Zustande I vorhandenen Aetherschwingung entspricht;

λ_1 die lineare Zusammendrückung des Körpers, welche dem Uebergang aus dem Nullzustand in den Zustand I entspricht;

f und h zwei von der Natur aber nicht von den Zuständen des Körpers abhängige Grössen.

Diese Hypothese scheint der Natur der Sache annähernd zu entsprechen, denn es ist klar, dass der Durchmesser einer Aetherhülle mit der Temperatur wächst, dagegen mit der Zusammendrückung des Körpers abnimmt, was bei dem Ausdruck (7) auch der Fall ist.

Dies vorausgesetzt, gibt uns die Gleichung (6) für den Nullzustand und für zwei Zustände I und II

$$\left.\begin{aligned} o = N_0 V_0 &= \frac{1}{6} M \left[\varphi(r_0) - \psi(r_0) D_0^2 \right] \\ N_1 V_1 &= \frac{1}{6} M \left[\varphi(r_1) - \psi(r_1) D_0^2 (1 - f \lambda_1 - h T_1) \right] \\ N_2 V_2 &= \frac{1}{6} M \left[\varphi(r_2) + \psi(r_2) D_0^2 (1 - f \lambda_2 - h T_2) \right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (8)$$

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= r_0 (1 - \lambda_1) \\ r_2 &= r_0 (1 - \lambda_2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Sind die Zustände I und II von dem Nullzustande nicht viel verschieden, so kann man nach dem Taylor'schen Satz schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(r_1) &= \varphi(r_0 - \lambda_1 r_0) = \varphi(r_0) - r_0 \frac{d\varphi(r_0)}{d r_0} \lambda_1 \\ \psi(r_1) &= \psi(r_0 - \lambda_1 r_0) = \psi(r_0) - r_0 \frac{d\psi(r_0)}{d r_0} \lambda_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (10)$$

Führt man diese Werthe in (8) ein, so ergibt sich:

$$o = N_0 V_0 = \frac{1}{6} M \left[\varphi(r_0) + \psi(r_0) D_0^2 \right]$$

$$N_1 V_1 = \frac{1}{6} M \left[\varphi(r_0) - r_0 \frac{d\varphi(r_0)}{d r_0} \lambda_1 + \left(\psi(r_0) - r_0 \frac{d\psi(r_0)}{d r_0} \lambda_1 \right) (1 - f \lambda_1 - h T_1) D_0^2 \right]$$

$$N_2 V_2 = \frac{1}{6} M \left[\varphi(r_0) - r_0 \frac{d\varphi(r_0)}{d r_0} \lambda_2 + \left(\psi(r_0) - r_0 \frac{d\psi(r_0)}{d r_0} \lambda_2 \right) (1 - f \lambda_2 - h T_2) D_0^2 \right]$$

Da wir annehmen, dass λ_1 λ_2 $f \lambda_1$ $h T_1$ sehr kleine Grössen sind, so dürfen wir die Cylinder, welche Produkte dieser Grössen enthalten, vernachlässigen, und dann erhalten wir:

$$o = N_0 V_0 = \frac{1}{6} M \left[\varphi(r_0) + \psi(r_0) D_0^2 \right]$$

$$N_1 V_1 = \frac{1}{6} M \left[\varphi(r_0) + \psi(r_0) D_0^2 \right] - \frac{1}{6} M \left[r_0 \frac{d\varphi(r_0)}{d r_0} + \left(r_0 \frac{d\psi(r_0)}{d r_0} + f \psi(r_0) \right) D_0^2 \right] \lambda_1 + \frac{1}{6} M h \psi(r_0) T_1$$

$$N_2 V_2 = \frac{1}{6} M \left[\varphi(r_0) + \psi(r_0) D_0^2 \right] - \frac{1}{6} M \left[r_0 \frac{d\varphi(r_0)}{d r_0} + \left(r_0 \frac{d\psi(r_0)}{d r_0} + f \psi(r_0) \right) D_0^2 \right] \lambda_2 + \frac{1}{6} M h \psi(r_0) T_2$$

Setzt man:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{6} \left[r_0 \frac{d\varphi(r_0)}{d r_0} + \left(r_0 \frac{d\psi(r_0)}{d r_0} + f \psi(r_0) \right) D_0^2 \right] &= a_0 \\ \frac{1}{6} h \psi(r_0) &= b_0 \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

so folgt aus den letzten drei Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} N_1 V_1 &= M(-a_0 \lambda_1 + b_0 T_1) \\ N_2 V_2 &= M(-a_0 \lambda_2 + b_0 T_2) \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

In diesen Ausdrücken sind a_0 und b_0 von der Natur des Stoffes abhängige Grössen, die durch Versuche bestimmt werden können; sind ferner T_1 und T_2 die rationellen Temperaturen. Nennt man t_1 und t_2 die mit dem hunderttheiligen Thermometer gemessenen Temperaturen und $\varDelta$ die rationelle Temperatur, welche dem Nullpunkt der Thermometerscala entspricht, so hat man:

$$T_1 = \varDelta + t_1$$

$$T_2 = \varDelta + t_2$$

daher erhält man auch statt der Gleichung (12):

$$\left. \begin{aligned} N_1 V_1 &= M(b_0 \varDelta - a_0 \lambda_1 + b_0 t_1) \\ N_2 V_2 &= M(b_0 \varDelta - a_0 \lambda_2 + b_0 t_2) \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Durch Division dieser Ausdrücke folgt:

$$\frac{N_1 V_1}{N_2 V_2} = \frac{1 - \frac{a_0}{b_0 \varDelta} \lambda_1 + \frac{1}{\varDelta} t_1}{1 - \frac{a_0}{b_0 \varDelta} \lambda_2 + \frac{1}{\varDelta} t_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Obgleich diese Resultate (13) und (14) unserer Untersuchung nur für Zustände gelten, welche von dem Nullzustande nur wenig verschieden sind, so wollen wir uns

doch erlauben, sie auf Zustände anzuwenden, die von dem Nullzustand beträchtlich abweichen.

Vergleichen wir zunächst das Resultat (14) mit dem combinirten Mariott'schen und Gay-Lussac'schen Gesetz, welches nach dem Versuch von *Regnault* zwar nicht genau aber doch sehr nahe richtig ist. Nach diesem Annäherungsgesetz ist für Gase aller Art:

$$\frac{N_1 V_1}{N_2 V_2} = \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

wobei α den Wärmeausdehnungscoeffizienten bedeutet.

Man sieht, dass die Ausdrücke (14) und (15) der Form nach vollkommen übereinstimmen, wenn a_0 gleich Null, und nahe übereinstimmen, wenn a_0 eine sehr kleine Grösse ist. Das Letztere ist in der That der Fall, denn diese Grösse a_0 bezieht sich auf den Nullzustand des Gases, also auf einen Zustand, in welchem die Entfernung r_0 der Dynamiden sehr gross und die Wechselwirkungen der Atome zweier Dynamiden sehr klein sind; es folgt also in der That aus den Gleichungen (5) und (11), dass sowohl a_0 als auch b_0 nur einen sehr kleinen Werth haben kann. Da es ferner wahrscheinlich ist, dass die Anziehung zwischen Aether und Körperatome $G(r)$ mit dem Wachsen von r in einem noch rascheren Verhältniss abnimmt, als die Abstossung $J(r)$ der Aetheratome, so folgt daraus, dass diese kleinen Werthe von a_0 und b_0 noch überdies für alle Gase sehr nahe übereinstimmen werden, dass also das Verhältniss $\frac{a_0}{b_0}$ für alle Gase sehr nahe einerlei Werthe haben wird.

Erlauben wir uns, in der Gleichung (14) die mit a_0 multiplizirten Glieder ganz zu vernachlässigen, so werden die Gleichungen (14) und (15) identisch, wenn man nimmt:

$$\frac{1}{\Delta} = \alpha$$

oder:

$$\Delta = \frac{1}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

es ergibt sich also aus unserer Theorie das interessante Resultat, dass der reziproke Werth des Wärmeausdehnungscoeffizienten für Gase gleich ist der wahren Temperatur, welche dem Nullpunkt der Thermometerscala entspricht. Nach *Regnault's* Verfahren ist:

für atmosphärische Luft	$\alpha = 0{\cdot}003670$
„ Wasserstoffgas	$= 0{\cdot}003661$
„ Stickstoffgas	$= 0{\cdot}003676$
„ Kohlenoxydgas	$= 0{\cdot}003669$
„ Kohlensäure	$= 0{\cdot}003710$

Der Coeffizient für atmosphärische Luft gibt:

$$\Delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0{\cdot}00367} = 272{\cdot}5^\circ$$

Die absolute Nulltemperatur wäre demnach 272·5° unter dem Gefrierpunkt des Wassers.

Aus der Gleichung (14) folgt auch, ganz in Uebereinstimmung mit den Ergebnissen der Regnault'schen Versuche, dass der Wärmeausdehnungscoefficient für Gase sowohl mit der Natur des Gases, als auch mit seiner Dichte etwas veränderlich ist.

In der Gleichung (14) kommen die Grössen $\lambda_1 \lambda_2$ vor, welche von der Compression des Gases abhängen, und die Grössen a_0 und b_0 sind mit der Natur des Gases etwas veränderlich.

Ich könnte nun die Gleichung (14) mit den von *Regnault* aufgefundenen Zahlen einer Prüfung unterwerfen, und könnte zeigen, dass diese Gleichung in der That mit den Erfahrungszahlen recht gut stimmt. Allein damit ist nicht viel gethan, denn die Gleichung (14) ist durch gar zu viele Vernachlässigungen gewonnen worden, und wenn sie auch mit den Zahlen ganz genau stimmt, so wüsste man doch den Grund nicht. Daher ziehe ich es vor, den in dieser Nummer eingeschlagenen Weg nicht weiter zu verfolgen, sondern einen andern naturgemässeren einzuschlagen, der uns zu genaueren und wichtigeren Resultaten führen wird.

ALLGEMEINES COMPRESSIONSGESETZ, VON WELCHEM DAS MARIOTT'SCHE GESETZ EIN SPEZIELLER FALL IST.

Wir haben früher Seite 58 die Gleichung gefunden:

$$N V = \frac{1}{6} M \left[\varphi(r) + \psi(r) D^2\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

dabei ist:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(r) &= C^2 S m r J(r) - 2 C S m r G(r) - S m r F(r) \\ \psi(r) &= \frac{C}{12}\left[C S m r \frac{d^2 J(r)}{d r^2} - S m r \frac{d^2 G(r)}{d r^2}\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

Diese Gleichungen sind noch sehr genau, denn es ist bei ihrer Herleitung nur sehr Unwesentliches vernachlässigt worden.

Gewiss werden die Physiker ihre Zustimmung geben, wenn wir nun die Annahme machen, dass die Wechselwirkung je zweier Atome irgend einer Potenz ihrer Entfernung verkehrt proportional ist. Ich setze daher:

$$\left.\begin{aligned} J(r) &= \frac{a}{r^{\alpha}} \\ G(r) &= \frac{b}{r^{\beta}} \\ F(r) &= \frac{c}{r^{\gamma}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

wobei $a\ b\ c\ \alpha\ \beta\ \gamma$ gewisse noch nicht bekannte constante Grössen bezeichnen. Um nun die in den Gleichungen (2) vorkommenden Summen zu berechnen, werden wir uns erlauben dürfen, die Rechnung so durchzuführen, wie wenn die Dynamiden um jede einzelne Dynamide in concentrischen kugelförmigen Schichten herumgelagert wären, wie Fig. 9 andeutet.

Nennen wir e die Entfernung der Schwerpunkte der Kerne zweier unmittelbar neben einander befindlichen Dynamiden, so sind:

$$e \qquad 2e \qquad 3e \qquad 4e \ldots\ldots \text{ die Halbmesser und}$$

$$4\pi e^2 \qquad 4.4\pi e^2 \qquad 9.4\pi e^2 \qquad 16.4\pi e^2 \ldots \text{ die Kugel-Oberflächen,}$$

in welchen die Atome um ein Centralatom herumgelagert sind, und 4π, 4.4π, 9.4π, 16.4π, sind die Anzahlen der Atome oder Dynamiden in diesen Kugelschichten. Für die n^{te} Schichte ist:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{der Halbmesser} \ldots\ldots & n e \\ \text{die Kugelfläche} \ldots\ldots & 4\pi e^2 n^2 \\ \text{die Anzahl der Dynamiden} \ldots & 4\pi n^2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Nennen wir nun r die Entfernung einer Dynamide in der n^{ten} Schichte von dem Centralatom, setzen also:

$$r = n e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

so ist vermöge (3):

$$J(r) = \frac{a}{(n e)^\alpha} \qquad G(r) = \frac{b}{(n e)^\beta} \qquad F(r) = \frac{c}{(n e)^\gamma}$$

demnach:

$$r J(r) = \frac{a}{(n e)^{\alpha - 1}} \qquad r G(r) = \frac{b}{(n e)^{\beta - 1}} \qquad r F(r) = \frac{c}{(n e)^{\gamma - 1}}$$

und wir erhalten nun mit Berücksichtigung, dass $4\pi n^2$ die Anzahl der Dynamiden in der n^{ten} Schichte bezeichnet:

$$\left.\begin{array}{l} S\, m\, r\, J(r) = \dfrac{1}{e^{\alpha-1}}\, S\, \dfrac{4\pi m a}{n^{\alpha-3}} \\[2ex] S\, m\, r\, G(r) = \dfrac{1}{e^{\beta-1}}\, S\, \dfrac{4\pi m b}{n^{\beta-3}} \\[2ex] S\, m\, r\, F(r) = \dfrac{1}{e^{\gamma-1}}\, S\, \dfrac{4\pi m c}{n^{\gamma-3}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

und diese rechter Hand der Gleichheitszeichen stehenden Summen sind für ein bestimmtes Medium constante Zahlen, denn es sind diese Summen zu nehmen, von $n = 1$ bis zu $n = \infty$.

Nun hat man ferner:

$$\left.\begin{aligned} r\,\frac{d^2\,J(r)}{d\,r^2} &= \frac{a\,\alpha\,(\alpha-1)}{e^{\alpha-1}\,n^{\alpha-1}} \\ r\,\frac{d^2\,G(r)}{d\,r^2} &= \frac{b\,\beta\,(\beta-1)}{e^{\beta+1}\,n^{\beta+1}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

und daher findet man nun:

$$\left.\begin{aligned} S\,m\,r\,\frac{d^2\,J(r)}{d\,r^2} &= \frac{1}{e^{\alpha-1}}\;S\,\frac{4\,\pi\,a\,\alpha\,(\alpha+1)\,m}{n^{\alpha-1}} \\ S\,m\,r\,\frac{d^2\,G(r)}{d\,r^2} &= \frac{1}{e^{\beta+1}}\;S\,\frac{4\,\pi\,b\,\beta\,(\beta-1)\,m}{n^{\beta-1}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Substituirt man diese Summenwerthe (5) und (7) in die Gleichung (2) und setzt sodann die Resultate in die Gleichung (1), so erhält man:

$$N\,V = \frac{1}{6}\,M \left\{ \begin{aligned} & \frac{C^2}{e^{\alpha-1}}\,S\,\frac{4\,\pi\,m\,a}{n^{\alpha-3}} - \frac{2\,C}{e^{\beta-1}}\,S\,\frac{4\,\pi\,m\,b}{n^{\beta-3}} - \frac{1}{e^{\gamma-1}}\,S\,\frac{4\,\pi\,m\,c}{n^{\gamma-3}} \\ & + \left[\frac{C^2}{e^{\alpha+1}}\,\frac{1}{12}\,S\,\frac{4\,\pi\,a\,\alpha\,(\alpha+1)\,m}{n^{\alpha-1}} - \frac{C}{e^{\beta-1}}\,\frac{1}{12}\,S\,\frac{4\,\pi\,b\,\beta\,(\beta+1)\,m}{n^{\beta-1}}\right] D^2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Nun ist aber $\frac{M}{m}\,e^3 = V$. Führt man diesen Werth von V ein, so folgt:

$$N = \frac{m}{6} \left\{ \begin{aligned} & \frac{C^2}{e^{\alpha+2}}\,S\,\frac{4\,\pi\,m\,a}{n^{\alpha-3}} - \frac{2\,C}{e^{\beta-2}}\,S\,\frac{4\,\pi\,m\,b}{n^{\beta-3}} - \frac{1}{e^{\gamma-2}}\,S\,\frac{4\,\pi\,m\,c}{n^{\gamma-3}} \\ & + \left[\frac{C^2}{e^{\alpha+4}}\,\frac{1}{12}\,S\,\frac{4\,\pi\,a\,\alpha\,(\alpha-1)\,m}{n^{\alpha-1}} - \frac{C}{e^{\beta+4}}\,\frac{1}{12}\,S\,\frac{4\,\pi\,b\,\beta\,(\beta+1)\,m}{n^{\beta-1}}\right] D^2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Berücksichtiget man endlich, dass

$$\frac{1}{e} = \left(\frac{M}{V}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{Q}{2\,g\,V}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{3}} = s^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{2\,g\,m}\right)^{\frac{1}{3}}$$

wobei Q das totale Gewicht des Körpers, s das spezifische Gewicht desselben unter dem Druck N, und g die Beschleunigung durch die Schwere bezeichnet, so findet man endlich, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= \frac{m}{6}\left(\frac{1}{2\,g\,m}\right)^{\frac{\alpha+2}{3}} S\,\frac{4\,\pi\,m\,a}{n^{\alpha-3}} \\
\mathfrak{B} &= \frac{m}{3}\left(\frac{1}{2\,g\,m}\right)^{\frac{\beta+2}{3}} S\,\frac{4\,\pi\,m\,b}{n^{\beta-3}} \\
\mathfrak{C} &= \frac{m}{6}\left(\frac{1}{2\,g\,m}\right)^{\frac{\gamma+2}{3}} S\,\frac{4\,\pi\,m\,c}{n^{\gamma-3}} \\
\mathfrak{D} &= \frac{m}{72}\left(\frac{1}{2\,g\,m}\right)^{\frac{\alpha+4}{3}} S\,\frac{4\,\pi\,a\,\alpha\,(\alpha+1)\,m}{n^{\alpha-1}} \\
\mathfrak{E} &= \frac{m}{72}\left(\frac{1}{2\,g\,m}\right)^{\frac{\beta+4}{3}} S\,\frac{4\,\pi\,b\,\beta\,(\beta+1)\,m}{n^{\beta-1}}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$N = \mathfrak{A}\,C^2\,s^{\frac{\alpha+2}{3}} - \mathfrak{B}\,C\,s^{\frac{\beta+2}{3}} - \mathfrak{C}\,s^{\frac{\gamma+2}{3}} + \left[\mathfrak{D}\,C^2\,s^{\frac{\alpha+4}{3}} - \mathfrak{E}\,C\,s^{\frac{\beta+4}{3}}\right] D^2 \;.\;. \quad (11)$$

Bevor wir uns spezieller mit diesem merkwürdigen Ausdruck beschäftigen, will ich die Bedeutung der darin erscheinenden Grössen in Erinnerung bringen.

Es ist:

N der auf die Flächeneinheit der Oberfläche des Körpers comprimirend wirkende äussere Druck;

C die Wärmecapazität des Körpers, d. h. die in der Gewichtseinheit enthaltene Aethermenge;

s das spezifische Gewicht des Körpers;

$\alpha\ \beta\ \gamma$ sind Zahlen, welche ausdrücken, den wievielten Potenzen ihrer Entfernung die Atomkräfte verkehrt proportional sind;

D der Durchmesser einer Aetherhülle.

Wir wollen nun diesen Ausdruck (11) auf Gase und feste Substanzen anwenden.

DAS COMPRESSIONSGESETZ FÜR GASE ODER DAS WAHRE MARIOTT'SCHE GESETZ.

Setzen wir eine gewisse Gasmenge zuerst einem äusseren Druck N, hierauf einem äusseren Druck N_1 aus, so wird dieses Gas im ersteren Falle ein gewisses spezifisches Gewicht s, im letzteren ein spezifisches Gewicht s_1 zeigen, und vermöge der Gleichung (11) dürfen wir schreiben:

$$N = \mathfrak{A}\,C^2 s^{\frac{\alpha+2}{3}} - \mathfrak{B}\,C\,s^{\frac{\beta+2}{3}} - \mathfrak{G}\,s^{\frac{\gamma+2}{3}} + \left(\mathfrak{D}\,C^2 s^{\frac{\alpha+4}{3}} - \mathfrak{E}\,C\,s^{\frac{\beta+4}{3}}\right) D^2$$

$$N_1 = \mathfrak{A}\,C^2 s_1^{\frac{\alpha+2}{3}} - \mathfrak{B}\,C\,s_1^{\frac{\beta+2}{3}} - \mathfrak{G}\,s_1^{\frac{\gamma+2}{3}} + \left(\mathfrak{D}\,C^2 s_1^{\frac{\alpha+4}{3}} - \mathfrak{E}\,C\,s_1^{\frac{\beta+4}{3}}\right) D_1^2$$

Durch Division dieser Ausdrücke findet man:

$$\frac{N}{N_1} = \left(\frac{s}{s_1}\right)^{\frac{\alpha+2}{3}} \frac{1 - \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}C} s^{\frac{\beta-\alpha}{3}} - \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}C^2} s^{\frac{\gamma-\alpha}{3}} + \left(\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} s^{\frac{2}{3}} - \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}C} s^{\beta-\alpha+2}\right) D^2}{1 - \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}C} s_1^{\frac{\beta-\alpha}{3}} - \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}C^2} s_1^{\frac{\gamma-\alpha}{3}} + \left(\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} s_1^{\frac{2}{3}} - \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}C} s_1^{\beta-\alpha+2}\right) D_1^2} \qquad (12)$$

und diese Gleichung gilt für schwache wie für starke Compressionen. Wenden wir sie zunächst auf schwache Compressionen an, so müsste dieselbe annähernd das gewöhnliche Mariott'sche Gesetz ausdrücken, d. h. diese Gleichung müsste, wenn wir in derselben $D = D_1$ setzen, also einerlei Temperatur voraussetzen:

$$\frac{N}{N_1} = \frac{s}{s_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

geben, denn in diesem Fall, d. h. für schwache Pressungen und bei gleicher Temperatur verhalten sich die Pressungen beinahe ganz genau wie die Dichten oder wie die spezifischen Gewichte. Damit aber unter diesen Umständen die Gleichung (12) mit (13) übereinstimmt, muss erstens $\frac{\alpha+2}{3} = 1$ oder $\alpha = 1$ sein und müssen ferner zweitens die Quotienten $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}C}\;\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}C^2}\;\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}}\;\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}C}$ verschiedene kleine Grössen sein, muss also $\mathfrak{A}$ im Vergleich zu $\mathfrak{B}\;\mathfrak{G}\;\mathfrak{D}\;\mathfrak{E}$ ausserordentlich gross sein, d. h. die Gleichung (12) stimmt mit den für Gase geltenden Thatsachen nur dann überein, wenn der Aether eine solche Beschaffenheit hat, dass die Abstossung zweier Aetheratome nur der ersten Potenz der Entfernung der Aethertheilchen verkehrt proportional ist, und wenn ferner die Abstossung der Aethertheilchen im Verhältniss zur Anziehung der Körperatome gegen einander und der Anziehung der Körper und Aetheratome sehr gross ist. Es stellt sich demnach das merkwürdige Resultat heraus, dass die Abstossungskraft zweier Aetheratome eine sehr energische und fern hin wirkende Kraft ist.

Setzen wir in der Gleichung (12) $\alpha = 1$, so wird dieselbe:

$$\frac{N}{N_1} = \frac{s}{s_1} \; \frac{1 - \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}C} s^{\frac{\beta-1}{3}} - \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}C^2} s^{\frac{\gamma-1}{3}} + \left(\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} s^{\frac{2}{3}} - \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}C} s^{\frac{\beta+1}{3}}\right) D^2}{1 - \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}C} s_1^{\frac{\beta-1}{3}} - \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}C^2} s_1^{\frac{\gamma-1}{3}} + \left(\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} s_1^{\frac{2}{3}} - \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}C} s_1^{\frac{\beta+1}{3}}\right) D_1^2} \quad . \; . \quad (14)$$

und dies ist nun die wahre Beziehung, welche zwischen den Pressungen und Dichten oder spezifischen Gewichten eines Gases besteht, d. h. das wahre Mariott'sche Gesetz. Leider können die Zahlen, welche *Regnault* zum Behufe der Prüfung des gewöhnlichen Mariott'schen Gesetzes gesucht und gefunden hat, nicht gebraucht werden, um damit die Formel (14) zu prüfen, denn *Regnault* gibt in seinen Relations expérimentales etc. nur die Werthe von $\frac{N s_1}{N_1 s}$ und von $\frac{s_1}{s}$ an, nicht aber die absoluten Werthe der spezifischen Gewichte $s\, s_1$ des Gases, und es wird überhaupt sehr schwer halten, die Gleichung (14) durch Versuche ganz scharf zu prüfen, denn die Zahl der zu bestimmenden Constanten ist sehr gross, und ihr Betrag ist dagegen verschwindend klein, denn nach der Thatsache gilt doch das gewöhnliche Mariott'sche Gesetz sehr nahe auch für sehr starke Compressionen.

In den Relations findet man z. B. Seite 421 angegeben, dass für atmosphärische Luft die Werthe des Quotienten $\frac{N s_1}{N s}$ gleich 0·996490 und 0·987780 sind, wenn die Volumsverhältnisse im ersteren Falle 2, im letzteren 16 betragen. Das Mariott'sche Gesetz ist demnach noch bei einer 16fachen Verdichtung ziemlich genau.

Unsere Formel enthält noch eine Hauptschwierigkeit, die ich nicht zu bewältigen im Stande bin; das ist die Bestimmung von D^2, d. h. die Bestimmung von dem Durchmesser einer Aetherhülle. Ich unterlasse es, die vielen weitläufigen aber vergeblichen Rechnungen hierher zu setzen, welche ich unternommen habe, um die Abhängigkeit zwischen D, s und t ausfindig zu machen.

Schon Seite 58, Gleichung (7), habe ich eine hypothetische Annäherungsformel für D^2 aufgestellt, allein mit derlei Formeln ist der Wissenschaft wenig gedient, denn wenn auch die Resultate ganz genau stimmen, so weiss man denn doch die Ursache nicht, und auf die Kenntniss der Ursachen kommt es vorzugsweise an.

Aus der Gleichung (14) ersieht man, dass *Regnault* wohl mit Recht gesagt hat: La vraie loi qui exprime les relations entre les volumes d'une même masse de gaz et les pressions qu'elle supporte, est évidemment trop complexe pour qu'on puisse espérer de la trouver uniquement par la méthode expérimentale.

BESTIMMUNG DES MODULUS DER ELASTIZITÄT FÜR FESTE KÖRPER.

Unsere Gleichung (11) gilt selbstverständlich auch für feste Körper, insofern man dieselben als Dynamidensysteme betrachten darf; wir können daher diese Gleichung zur Bestimmung des sogenannten Modulus der Elastizität benützen.

Nehmen wir an, ein fester Körper sei zuerst der Pressung N der atmosphärischen Luft ausgesetzt, und werde hierauf einem höheren äusseren Druck N_1 unterworfen, so wird seine Dichte zunehmen und von s in s_1 übergehen. Allein bei festen Körpern ist die Aenderung der Dichte stets äusserst klein, daher werden wir keinen merklichen Fehler begehen, wenn wir setzen:

$$\frac{N_1 - N}{s_1 - s} = \frac{dN}{ds} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

Sucht man vermittelst (11) den Differenzialquotienten von N nach s und setzt seinen Werth in (15), so findet man:

$$\frac{N_1 - N}{s_1 - s} = \mathfrak{A}\,C^3\,\frac{\alpha - 2}{3}\,s^{\frac{\alpha - 1}{3}} - \mathfrak{B}\,C\,\frac{\beta - 2}{3}\,s^{\frac{\beta - 1}{3}} - \mathfrak{G}\,\frac{\gamma + 2}{3}\,s^{\frac{\gamma - 1}{3}} +$$
$$+ \left(\mathfrak{D}\,C^3\,\frac{\alpha + 4}{3}\,s^{\frac{\alpha + 1}{3}} - \mathfrak{G}\,C\,\frac{\beta + 4}{3}\,s^{\frac{\beta - 1}{3}}\right) D^2$$

oder wenn wir auch hier $\alpha = 1$ setzen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{N_1 - N}{s_1 - s} = \mathfrak{A}\,C^3 - \mathfrak{B}\,C\,\frac{\beta + 2}{3}\,s^{\frac{\beta - 1}{3}} - \mathfrak{G}\,\frac{\gamma + 2}{3}\,s^{\frac{\gamma - 1}{3}} + \\ + \left(\mathfrak{D}\,C^3\,\frac{5}{3}\,s^{\frac{2}{3}} - \mathfrak{G}\,C\,\frac{\beta + 4}{3}\,s^{\frac{\beta + 1}{3}}\right) D^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (16)$$

Nennt man λ die lineare Zusammendrückung des Körpers, d. h. die Verkürzung jeder Längeneinheit, oder endlich die Annäherung zweier Körperatome, deren Entfernung bei dem Druck N gleich einer Längeneinheit war, so ist für so schwache Zusammendrückungen, wie sie bei festen Körpern vorkommen:

$$s_1 - s = 3\,\lambda\,s \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

Nennt man ferner ε den Modulus der Elastizität in dem üblichen Sinne, so ist zu setzen:

$$\lambda\,\varepsilon = N_1 - N \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

Führt man diese Resultate (17) und (18) in (16) ein, so erhält man einen Ausdruck, aus welchem folgt:

$$\varepsilon = 3\,\mathfrak{A}\,C^3 s \left[1 - \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\,C}\,\frac{\beta - 2}{3}\,s^{\frac{\beta - 1}{3}} - \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}\,C^3}\,\frac{\gamma - 2}{3}\,s^{\frac{\gamma - 1}{3}} + \left(\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}}\,\frac{5}{3}\,s^{\frac{2}{3}} - \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}\,C}\,\frac{\beta + 4}{3}\,s^{\frac{\beta + 1}{3}}\right) D^2\right] \quad (19)$$

Dieser Ausdruck ist auch für eine gleichförmige Ausdehnung des Körpers richtig.

Die Richtigkeit dieses Ausdruckes vorausgesetzt, so folgt aus demselben, dass der Modulus der Elastizität eines Materials (wegen s) von der Dichte und (wegen D^2) von der Temperatur desselben abhängt. Auch richtet sich derselbe nach der Wärmecapazität des Stoffes.

Eine scharfe Prüfung dieser Gleichung (19) durch Versuche wird schwerlich möglich werden, denn zur Bestimmung aller in dieser Gleichung erscheinenden Constanten wäre eine grosse Anzahl von äusserst genauen Versuchen nothwendig, und zur Prüfung der-

selben müsste man noch zwei- bis dreimal so viel Versuche machen. Diese Versuche sind äusserst schwierig mit hinreichender Genauigkeit durchzuführen, weil sich bei festen Körpern die Dichte nur um sehr wenig ändert, und der geringste Fehler in der Bestimmung der Dichte sehr beträchtliche Ungenauigkeiten veranlassen kann.

Die gewiss sehr schätzenswerthen Versuche *Wertheim's* über die Bestimmung des Modulus der Elastizität sind nicht im entferntesten genügend, um die Gleichung (19) durch numerische Rechnungen prüfen zu können, aber ich glaube, die Folgerungen, welche *Wertheim* aus seinen Versuchen zieht, vollständig hierher setzen zu sollen, obgleich einige derselben auf Verhältnisse Bezug haben, die uns in diesem Augenblick nicht berühren. Diese Folgerungen sind: Mémoires de physique mécanique, par *Wertheim* Pag. (67):

Conclusions.

1. Le coéfficient d'élasticité n'est pas constant pour un même métal; toutes les circonstances qui augmentent la densité le font grandir, et réciproquement.

   Dies ist auch bei unserem Ausdruck (19) der Fall. ε wächst mit s.

2. Les vibrations longitudinales et transversales conduisent sensiblement au même coéfficient d'élasticité.
3. Les vibrations conduisent à des coéfficients d'élasticité plus grands que ceux qu'on obtient par l'allongement. Cette différence provient de l'accélération de mouvement produite par la chaleur dégagée.
4. Par suite, le son dans les corps solides est dû aux ondes avec condensation, et l'on pourra, au moyen de la formule donnée par *Duhamel*, se servir du rapport entre la vitesse théorique et réelle du son, pour trouver le rapport de la chaleur spécifique sans pression constante. Ce rapport est plus grand pour les métaux recuits que pour ceux non recuits.
5. Le coéfficient d'élasticité diminue constamment avec l'élévation de la température, depuis 15 degrés jusqu'à 200 degrés, dans un rapport plus rapide que celui qu'on déduirait de la dilatation correspondante. Cela a lieu pour tous les métaux, excepté le fer et l'acier. Pour ceux-là si l'on prend les températures pour abscisses, et les coéfficients d'élasticité correspondants pour ordonnées, les courbes qui représentent la marche de leur élasticité en fonction de ces températures s'élèvent depuis 15 degrés jusqu'à 100 degrés, puis elles ont un point d'inflexion situé entre 100 et 200 degrés.

Auch unsere Formel zeigt, dass der Modulus der Elastizität von der Temperatur abhängt, weil D mit der Temperatur t veränderlich ist, allein da ich nicht im Stande bin, die wahre Abhängigkeit zwischen D und t anzugeben, so ist eine genauere Vergleichung der obigen Erfahrungen mit unserer Theorie nicht möglich. Für die Mehrzahl der Metalle nimmt ε ab, wenn t wächst. Für Eisen und Stahl findet jedoch das Gegentheil statt.

Da unser D^2 mit t stets wächst, so kann unsere Formel mit dieser Erfahrung nur dann stimmen, wenn der mit D^2 multiplizirte in Klammern eingeschlossene Ausdruck für Eisen und Stahl positiv, für die übrigen Metalle jedoch negativ ist.

6. L'aimantation ne change pas sensiblement l'élasticité du fer.
7. L'allongement des verges ou fils, par l'application de charge, ne change leurs densités que très-peu; le coëfficient d'élasticité ne doit donc aussi varier que de peu dans les diverses positions d'équilibre. C'est, en effet, ce qui a lieu tant que les charges n'approchent pas de très-près celle qui produit la rupture. La loi de *Gerstner* se trouve donc confirmée sur tous les métaux qui atteignent encore sensiblement une position d'équilibre, après avoir dépassé leur limite d'élasticité.

Unsere Gleichung ist für den Fall gefunden, dass der Körper nach allen Richtungen entweder gleichförmig ausgedehnt oder gleichförmig comprimirt werde, kann also auf Stäbe, die nur nach ihrer Länge gedehnt werden, nicht angewendet werden; sie ist jedoch mit der unter Nr. 7 ausgesprochenen Erfahrung in keinem Widerspruch.

8. Les allongements permanents ne se font pas par sauts, par saccades, mais d'une manière continue; en modifiant convenablement la charge et sa durée d'action, on pourra produire tel allongement permanent qu'on voudra.

Wenn ein Körper, dessen Atome axig gestaltet sind, was man bei Metallen wohl annehmen muss, nach einer Richtung stark gedehnt wird, müssen nothwendig Aenderungen in der Stellung und Gruppirung der Atome eintreten, und der Körper wird daher durch jede solche Dehnung gleichsam zu einem anderen Stoff.

9. Une vraie limite d'élasticité n'existe pas, et si l'on n'observe pas d'allongements permanents pour les premières charges, c'est qu'on ne les a pas laissées agir pendant assez de temps, et que la verge, soumise à l'expérience, est trop courte, relativement au degré d'exactitude de l'instrument qui sert aux mesures.

   Les valeurs de l'allongement maximum et de la cohésion dépendent aussi beaucoup de la manière d'opérer; on trouve la première d'autant plus grande, et la seconde d'autant plus petite, que l'on augmente plus lentement les charges. On voit à combien d'arbitraire est soumise la détermination du plus petit et du plus grand allongement permanent, et qu'on ne saurait, avec M. *Lagerhjelm*, fonder une loi sur leurs valeurs.
10. La résistance à la rupture est considérablement diminuée par le recuit. L'élévation de la température jusqu'à 200 degrés ne diminue pas de beaucoup la cohésion des métaux recuits d'avance.
11. Le produit εe^7 du module d'élasticité par la septième puissance de la distance des molécules, ou le produit $\varepsilon s^{-\frac{7}{3}}$ est le même pour la plupart des métaux.

Dies folgt aus unserer Gleichung nicht, ist aber auch nach den von *Wertheim* gefundenen Zahlen so ungenau, dass man diese Folgerung (11) nicht anerkennen kann.

Wenn wir in unserer langen Formel (19) alle auf die Einheit folgenden Glieder des Ausdruckes in der Klammer ganz weglassen, gewiss also sehr derb d'rein gehen, so würde aus derselben folgen, dass annähernd $\frac{\varepsilon}{C^2 s}$ für alle Metalle constant wäre, und das ist in der That wenigstens eben so genau richtig als obiger Ausspruch von *Wertheim.*

	s	ε	c	log. $\frac{\varepsilon}{C^2 s}$
Blei	11·215	1775	0·0314	5·3010
Eisen . . .	7·848	20869	0·1138	5·3463
Gold. . . .	18·514	5584	0·0324	5·4578
Kupfer . . .	8·933	12450	0·0951	5·2041
Zink. . . .	7·146	9021	0·0955	5·1461

Damit ist wenigstens gezeigt, dass selbst bei einer wahren Misshandlung unserer theoretischen Resultate dennoch Zahlen herauskommen, die sich sehen lassen dürfen.

Formeln dieser Art, wie (19) ist, können mit den bis jetzt bestimmten physikalischen Elementen der Stoffe gar nicht geprüft werden, weil diese Elemente nicht einem und demselben individuellen Stoff entnommen sind. Angenommen z. B., die Beziehung

$$\frac{\varepsilon}{C^2 s} = \text{const.}$$

wäre wirklich eine Wahrheit, was gewiss nicht der Fall ist, so könnte man für diese Constante den rechten Werth nicht finden, wenn man für s das spezifische Gewicht eines gewissen Eisens, für C die Wärmecapazität eines andern Eisens, und für ε den Modulus der Elastizität eines dritten Eisens in Rechnung brächte, sondern nur dann, wenn die Grössen ε C s von einem und demselben Stück Eisen bekannt wären.

Es ist meine Ueberzeugung, dass die den festen Substanzen entsprechenden physikalischen Fundamentalzahlen von Grund aus neu bestimmt werden müssen. Die ganze Million von Versuchen, die mit Eisen gemacht wurden, um das spezifische Gewicht, die Wärmecapazität, den Modulus der Elastizität, die absolute Festigkeit, das Wärme- und Elektrizitäts-Leitungsvermögen dieses Stoffs zu bestimmen, ist beinahe vergeblich gemacht, denn es ist mit diesem ganzen Zahlengetümmel nicht möglich, irgend einen Zusammenhang zwischen den genannten physikalischen Elementen des Eisens ausfindig zu machen, oder ein auf mathematischem Wege gefundenes Resultat zu prüfen, wo hingegen eine vollständige Bestimmung aller physikalischen Elemente von einigen wenigen Stückchen Eisen zur Entdeckung jenes Zusammenhanges führen könnte. Die Naturforscher haben fort und fort das Wort „Thatsache" im Munde, wenn man aber diese Dinge mit scharfem Blick ansieht, fangen diese feststehenden Thatsachen alle zu wackeln an, oder fallen gar zu Boden.

GLEICHGEWICHT EINES DYNAMIDENSYSTEMS MIT ELASTIZITÄTSAXEN.

Die vollständigen Bedingungen des Gleichgewichts eines Dynamidensystems mit Elastizitätsaxen würden die Position und Stellung jeder einzelnen Dynamide des Systems bestimmen. Die Aufsuchung dieser vollständigen Bedingungen führt zu einem Gewühle von analytischen Formeln, die ich nicht zu bewältigen im Stande war. Vermittelst des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeit kann man aber ohne Schwierigkeit einige Beziehungen, welche die Positionen der Dynamiden im Gleichgewichtszustand charakterisiren, auf folgende Art ausfindig machen.

Es seien :

$x\ y\ z$ die Coordinaten des Schwerpunktes einer Dynamide A;

$x_1\ y_1\ z_1$ die Coordinaten des Schwerpunktes einer anderen Dynamide A_1;

$X\ Y\ Z$ die Kräfte, welche von aussen her auf die Masseneinheit der Dynamide A parallel mit den Coordinatenaxen einwirken;

$X_2\ Y_2\ Z_2$ Kräfte, welche nach den positiven Richtungen der Coordinatenaxen auf die Masseneinheit einer an der Oberfläche des Körpers befindlichen Dynamide A_2 von aussen her einwirken;

$x_2\ y_2\ z_2$ die Coordinaten dieses Punktes A_2 an der Oberfläche;

m und m_1 die Massen der Dynamiden A und A_1;

r die Entfernung der Schwerpunkte dieser Dynamiden;

$m\,m_1\,f(r)$ die Wechselwirkung zweier Dynamiden, welche Seite 52 berechnet wurde.

Da jede Dynamide nach jeder Richtung vollkommen frei beweglich ist, so dürfen wir nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit jeder Dynamide eine beliebige Verschiebung ertheilen, und muss für den Gleichgewichtszustand die algebraische Summe der diesen Verschiebungen entsprechenden virtuellen Arbeiten aller Kräfte gleich Null sein. Bezeichnen wir durch :

$$\left.\begin{matrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ \delta x_1 & \delta y_1 & \delta z_1 \\ \delta x_2 & \delta y_2 & \delta z_2 \end{matrix}\right\}$$

die willkührlichen unendlich kleinen Verschiebungen der Dynamiden $A\ A_1\ A_2$, gemessen nach den Coordinatenaxen,

so sind :

$$\left.\begin{matrix} m\,(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) \\ m\,(X_2\,\delta x_2 + Y_2\,\delta y_2 + Z_2\,\delta z_2) \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

die virtuellen Arbeiten, welche zweien der äusseren Kräften entsprechen, und ist :

$$m\,m_1\,f(r)\left\{\begin{matrix} \dfrac{x_1 - x}{r}\,\delta x_1 + \dfrac{y_1 - y}{r}\,\delta y_1 + \dfrac{z_1 - z}{r}\,\delta z_1 \\ -\dfrac{x_1 - x}{r}\,\delta x - \dfrac{y_1 - y}{r}\,\delta y - \dfrac{z_1 - z}{r}\,\delta z \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

die virtuelle Arbeit, welche der Distanzänderung der Dynamiden A und A_1 entspricht.

Bezeichnen wir die relativen Coordinaten von A_1 gegen A mit Δx Δy Δz, setzen demnach:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x = \Delta x \\ y_1 - y = \Delta y \\ z_1 - z = \Delta z \end{array}\right\}$$

so wird der Ausdruck (2):

$$m\, m_1\, f(r) \left[\frac{\Delta x}{r}\,\delta(\Delta x) + \frac{\Delta y}{r}\,\delta(\Delta y) + \frac{\Delta z}{r}\,\delta(\Delta z)\right]$$

Die Summe der virtuellen Arbeiten, welche den Distanzänderungen sämmtlicher Dynamiden gegen die Dynamide A entspricht, ist demnach:

$$m\, S\, m_1\, f(r) \left[\frac{\Delta x}{r}\,\delta(\Delta x) + \frac{\Delta y}{r}\,\delta(\Delta y) + \frac{\Delta z}{r}\,\delta(\Delta z)\right] \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

wobei sich das Summenzeichen S auf alle Δx Δy Δz, also auf alle m_1 bezieht; und die Summe der virtuellen Arbeiten, welche der Distanzänderung jeder Dynamide gegen jede andere entspricht, ist endlich:

$$\frac{1}{2}\,\Sigma m\, S\, m_1\, f(r) \left[\frac{\Delta x}{r}\,\delta(\Delta x) + \frac{\Delta y}{r}\,\delta(\Delta y) + \frac{\Delta z}{r}\,\delta(\Delta z)\right] \quad . \ . \ . \ . \ . \ (4)$$

wobei sich das Summenzeichen Σ auf alle Massen m oder auf alle x y z bezieht. Dieser Ausdruck fordert, dass man für jede Dynamide des Systems die dem Ausdruck (3) analoge Grösse berechnen, und alle diese Grössen addiren, aber schliesslich von dieser Summe nur die Hälfte nehmen soll. Der Faktor $\frac{1}{2}$ rührt daher, dass durch die Summirungen Σ und S jede virtuelle Arbeit zweimal genommen wird, während sie nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit nur einmal genommen werden darf.

Wenn auf das Dynamidensystem keine oder solche äussere Kräfte einwirkten, dass die Elastizität oder die Dynamidengruppirung um jede Dynamide des Systems herum von ganz gleicher Beschaffenheit wäre, würde der Ausdruck (3) für jede Dynamide den gleichen Werth haben, mit Ausnahme derjenigen Dynamiden, die sich ganz in der Nähe der Oberfläche des Systems befinden, und dann erhielte man statt des Ausdruckes (4) sehr nahe:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{M}{m}\, S\, m_1\, f(r) \left[\frac{\Delta x}{r}\,\delta(\Delta x) + \frac{\Delta y}{r}\,\delta(\Delta y) + \frac{\Delta z}{r}\,\delta(\Delta z)\right] \quad . \ . \ . \ . \ (5)$$

Wenn wir aber in Bezug auf die äusseren Kräfte keine Beschränkung annehmen, so erhalten wir nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit als Gleichgewichtsbedingung:

$$o = \left\{ \begin{array}{l} \Sigma m\,(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) + \Sigma m\,(X_1\,\delta x_1 + Y_1\,\delta y_1 + Z_1\,\delta z_1) + \\ + \frac{1}{2}\,\Sigma m\,S\,m_1\,f(r)\left[\frac{\varDelta x}{r}\,\delta(\varDelta x) + \frac{\varDelta y}{r}\,\delta(\varDelta y) + \frac{\varDelta z}{r}\,\delta(\varDelta z)\right] \end{array} \right\} \quad . \; . \; . \quad (6)$$

Da nun die Verschiebungen absolut willkührlich sind, so dürfen wir uns erlauben zu setzen:

$$\left. \begin{array}{l} \delta x = h_0 + h_1\,x + h_2\,y + h_3\,z \\ \delta y = k_0 + k_1\,x + k_2\,y + k_3\,z \\ \delta z = l_0 + l_1\,x + l_2\,y + l_3\,z \end{array} \right| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

wobei $h_0\ h_1\ h_2\ h_3\ k_0\ k_1\ k_2\ k_3\ l_0\ l_1\ l_2\ l_3$ unendlich kleine, aber absolut willkührliche Grössen bezeichnen; und dann erhalten wir:

$$\Sigma m\,(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = \Sigma m \left\{ \begin{array}{l} X\,(h_0 + h_1\,x + h_2\,y + h_3\,z) \\ Y\,(k_0 + k_1\,x + k_2\,y + k_3\,z) \\ Z\,(l_0 + l_1\,x + l_2\,y + l_3\,z) \end{array} \right\}$$

oder:

$$\Sigma m\,(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = \left\{ \begin{array}{l} h_0\,\Sigma m\,X \quad + k_0\,\Sigma m\,Y \quad + l_0\,\Sigma m\,Z \\ h_1\,\Sigma m\,X\,x + h_2\,\Sigma m\,X\,y + h_3\,\Sigma m\,X\,z \\ k_1\,\Sigma m\,Y\,x + k_2\,\Sigma m\,Y\,y + k_3\,\Sigma m\,Y\,z \\ l_1\,\Sigma m\,Z\,x + l_2\,\Sigma m\,Z\,y + l_3\,\Sigma m\,Z\,z \end{array} \right\} \quad . \; . \quad (8)$$

ferner:

$$\Sigma m\,(X_1\,\delta x_1 + Y_1\,\delta y_1 + Z_1\,\delta z_1) = \left\{ \begin{array}{l} h_0\,\Sigma m\,X_1 \quad + k_0\,\Sigma m\,Y_1 \quad + l_0\,\Sigma m\,Z_1 \\ h_1\,\Sigma m\,X_1\,x_1 + h_2\,\Sigma m\,X_1\,y_1 + h_3\,\Sigma m\,X_1\,z_1 \\ k_1\,\Sigma m\,Y_1\,x_1 + k_2\,\Sigma m\,Y_1\,y_1 + k_3\,\Sigma m\,Y_1\,z_1 \\ l_1\,\Sigma m\,Z_1\,x_1 + l_2\,\Sigma m\,Z_1\,y_1 + l_3\,\Sigma m\,Z_1\,z_1 \end{array} \right\} \quad (9)$$

endlich wird:

$$\frac{1}{2}\,\Sigma m\,S\,m_1\,f(r)\left[\frac{\varDelta x}{r}\,\delta(\varDelta x) + \frac{\varDelta y}{r}\,\delta(\varDelta y) + \frac{\varDelta z}{r}\,\delta(\varDelta z)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,\Sigma m \left\{ \begin{array}{l} S\,m_1\,f(r)\,\frac{\varDelta x}{r}\,(h_1\,\varDelta x + h_2\,\varDelta y + h_3\,\varDelta z) \\ S\,m_1\,f(r)\,\frac{\varDelta y}{r}\,(k_1\,\varDelta x + k_2\,\varDelta y + k_3\,\varDelta z) \\ S\,m_1\,f(r)\,\frac{\varDelta z}{r}\,(l_1\,\varDelta x + l_2\,\varDelta y + l_3\,\varDelta z) \end{array} \right\}$$

oder auch:

$$\frac{1}{2}\, \Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r) \left[\frac{\Delta x}{r}\, \delta(\Delta x) + \frac{\Delta y}{r}\, \delta(\Delta y) + \frac{\Delta z}{r}\, \delta(\Delta z) \right] =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} h_1\, \frac{1}{2}\, \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta x^2}{r} + h_2\, \frac{1}{2}\, \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta x\, \Delta y}{r} + h_3\, \frac{1}{2}\, \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta x\, \Delta z}{r} \\ k_1\, \frac{1}{2}\, \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta x\, \Delta y}{r} + k_2\, \frac{1}{2}\, \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta y^2}{r} + k_3\, \frac{1}{2}\, \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta y\, \Delta z}{r} \\ l_1\, \frac{1}{2}\, \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta x\, \Delta z}{r} + l_2\, \frac{1}{2}\, \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta y\, \Delta z}{r} + l_3\, \frac{1}{2}\, \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta z^2}{r} \end{matrix} \right\} \quad (10)$$

Setzen wir die Werthe, welche die Gleichungen (8), (9) und (10) darbieten, in die Gleichung (6), und ordnen die Glieder, so finden wir:

$$0 = \left\{ \begin{matrix} h_0\, \Sigma m (X + X_1) + k_0\, \Sigma m (Y + Y_1) + l_0\, \Sigma m (Z + Z_1) \\ h_1 \left[\Sigma m (X x + X_1 x_1) + \frac{1}{2}\, \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta x^2}{r} \right] \\ h_2 \left[\Sigma m (X y + X_1 y_1) + \frac{1}{2}\, \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta x\, \Delta y}{r} \right] \\ h_3 \left[\Sigma m (X z + X_1 z_1) + \frac{1}{2}\, \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta x\, \Delta z}{r} \right] \\ k_1 \left[\Sigma m (Y x + Y_1 x_1) + \frac{1}{2}\, \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta x\, \Delta y}{r} \right] \\ k_2 \left[\Sigma m (Y y + Y_1 y_1) + \frac{1}{2}\, \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta y^2}{r} \right] \\ k_3 \left[\Sigma m (Y z + Y_1 z_1) + \frac{1}{2}\, \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta y\, \Delta z}{r} \right] \\ l_1 \left[\Sigma m (Z x + Z_1 x_1) + \frac{1}{2}\, \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta x\, \Delta z}{r} \right] \\ l_2 \left[\Sigma m (Z y + Z_1 y_1) + \frac{1}{2}\, \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta y\, \Delta z}{r} \right] \\ l_3 \left[\Sigma m (Z z + Z_1 z_1) + \frac{1}{2}\, \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta z^2}{r} \right] \end{matrix} \right\}$$

Da nun die unendlich kleinen Grössen $h_0\ k_0\ l_0\ h_1\ k_1\ l_1\ h_2\ k_2\ l_2\ h_3\ k_3\ l_3$ von einander ganz unabhängig und überhaupt ganz willkührlich sind, so kann die letzte Gleichung nur bestehen, wenn jeder mit einer solchen willkührlichen Grösse multiplizirte Faktor gleich Null ist. Demnach bestehen im Gleichgewichtszustand des Mediums folgende Beziehungen:

10.

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\, m\,(X + X_2) = 0 \\ \Sigma\, m\,(Y + Y_2) = 0 \\ \Sigma\, m\,(Z + Z_2) = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (11)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\, m\,(X x + X_2 x_2) + \frac{1}{2}\, \Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r)\, \frac{\Delta x^2}{r} = 0 \\ \Sigma\, m\,(X y + X_2 y_2) + \frac{1}{2}\, \Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r)\, \frac{\Delta x\, \Delta y}{r} = 0 \\ \Sigma\, m\,(X z + X_2 z_2) + \frac{1}{2}\, \Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r)\, \frac{\Delta x\, \Delta z}{r} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (12)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\, m\,(Y x + Y_2 x_2) + \frac{1}{2}\, \Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r)\, \frac{\Delta x\, \Delta y}{r} = 0 \\ \Sigma\, m\,(Y y + Y_2 y_2) + \frac{1}{2}\, \Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r)\, \frac{\Delta y^2}{r} = 0 \\ \Sigma\, m\,(Y z + Y_2 z_2) + \frac{1}{2}\, \Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r)\, \frac{\Delta y\, \Delta z}{r} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (13)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\, m\,(Z x + Z_2 x_2) + \frac{1}{2}\, \Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r)\, \frac{\Delta x\, \Delta z}{r} = 0 \\ \Sigma\, m\,(Z y + Z_2 y_2) + \frac{1}{2}\, \Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r)\, \frac{\Delta y\, \Delta z}{r} = 0 \\ \Sigma\, m\,(Z z + Z_2 z_2) + \frac{1}{2}\, \Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r)\, \frac{\Delta z^2}{r} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (14)$$

Aus diesen Gleichungen folgt auch:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\, m\,(X + X_2) = 0 \\ \Sigma\, m\,(Y + Y_2) = 0 \\ \Sigma\, m\,(Z + Z_2) = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (15)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\, m\,(X y - Y x) + \Sigma\, m\,(X_2 y_2 - Y_2 x_2) = 0 \\ \Sigma\, m\,(X z - Z x) + \Sigma\, m\,(X_2 z_2 - Z_2 x_2) = 0 \\ \Sigma\, m\,(Y z - Z y) + \Sigma\, m\,(Y_2 z_2 - Z_2 y_2) = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (16)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\, m\,(X x + X_2 x_2) + \frac{1}{2}\, \Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r)\, \frac{\Delta x^2}{r} = 0 \\ \Sigma\, m\,(Y y + Y_2 y_2) + \frac{1}{2}\, \Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r)\, \frac{\Delta y^2}{r} = 0 \\ \Sigma\, m\,(Z z + Z_2 z_2) + \frac{1}{2}\, \Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r)\, \frac{\Delta z^2}{r} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (17)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma\, m\,(X\,y + X_2\,y_2) + \frac{1}{2}\,\Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r)\,\frac{\Delta x\,\Delta y}{r} = o\\
&\Sigma\, m\,(Y\,z + Y_2\,z_2) + \frac{1}{2}\,\Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r)\,\frac{\Delta y\,\Delta z}{r} = o\\
&\Sigma\, m\,(Z\,x + Z_2\,x_2) + \frac{1}{2}\,\Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r)\,\frac{\Delta z\,\Delta x}{r} = o
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Die Gleichungen (15) und (16) sind bekanntlich die Bedingungen, welche zwischen den äusseren auf einen Körper einwirkenden Kräften im Gleichgewichtszustand erfüllt sein müssen.

Die Gleichungen (17) und (18) sind gewisse Beziehungen zwischen den äusseren und inneren Kräften des Systems.

Steht das System nur unter der Einwirkung der inneren Kräfte, sind also $X = Y = Z = X_0 = Y_0 = Z_0 = o$, so hat man vermöge (17) und (18):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r)\,\frac{\Delta x^2}{r} = o\\
&\frac{1}{2}\,\Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r)\,\frac{\Delta y^2}{r} = o\\
&\frac{1}{2}\,\Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r)\,\frac{\Delta z^2}{r} = o
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r)\,\frac{\Delta x\,\Delta y}{r} = o\\
&\frac{1}{2}\,\Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r)\,\frac{\Delta y\,\Delta z}{r} = o\\
&\frac{1}{2}\,\Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r)\,\frac{\Delta z\,\Delta x}{r} = o
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

oder auch weil in diesem Falle das Summenzeichen Σ weggelassen, und dafür der constante Faktor $\frac{M}{m}$ gesetzt werden darf:

$$\left.\begin{aligned}
&S\, m_1\,\frac{f(r)}{r}\,\Delta x^2 = o\\
&S\, m_1\,\frac{f(r)}{r}\,\Delta y^2 = o\\
&S\, m_1\,\frac{f(r)}{r}\,\Delta z^2 = o
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

$$\left.\begin{array}{l} S\, m_1 \frac{f(r)}{r} \Delta x \, \Delta y = o \\ S\, m_1 \frac{f(r)}{r} \Delta x \, \Delta z = o \\ S\, m_1 \frac{f(r)}{r} \Delta y \, \Delta z = o \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Die Beziehungen (22) sind für sich klar, wenn die Gruppirung der Dynamiden von der Art ist, dass jedem Punkt, dessen relative Coordinaten Δx Δy Δz sind, ein anderer Punkt entspricht, dessen Coordinaten $-\Delta x$ $-\Delta y$ $-\Delta z$ sind. Aber die Gleichungen (21) waren nicht vorauszusehen, und man sieht aus denselben, dass $f(r)$ für gewisse Werthe von r positiv, für andere dagegen negativ sein muss, was auch in der That nach unseren Untersuchungen über die Natur von $f(r)$ der Fall ist. Denn wir haben Seite 55 gefunden:

$$f(r) = C^2 J(r) - 2 C G(r) - F(r) + \frac{C}{12}\left[C \frac{d^2 J(r)}{d r^2} - \frac{d^2 G(r)}{d r^2}\right] D^2 \quad \ldots \quad (23)$$

Will man die Sache ganz streng nehmen, so darf in dieser Untersuchung für $f(r)$ nicht dieser Ausdruck (23) gesetzt werden, denn in diesem ist der Einfluss der Gestalt vernachlässigt, sondern man müsste in den Gleichungen bis inclusive (22) $f(r)$ als eine Funktion ansehen, die nicht blos mit r, sondern auch mit der Richtung von r veränderlich wäre. Denn da wir ein Medium voraussetzen, das nach verschiedenen Richtungen verschiedene Elastizitäten besitzt, so ist die Anziehung zweier Atome, die in einer der Elastizitätsaxen liegen, anders als die Anziehung zweier Atome, die in einer anderen Elastizitätsaxe sind.

Die Gleichungen (17) und (18) leisten zur Lösung von vielen Problemen vortreffliche Dienste; sie können insbesondere als Grundlage zu einer Theorie des Gleichgewichtes elastischer Körper gebraucht werden. Will man den Gleichgewichtszustand eines Stabes, der durch die Einwirkung äusserer Kräfte gebogen oder gedreht wird, mit vollkommener Schärfe bestimmen, so hat man es mit einem ausserordentlich schwierigen Probleme zu thun, dessen vollkommene Lösung noch lange nicht gelingen wird, wovon man sich am besten durch die Arbeiten *Lamé's* in seiner „Théorie de l'élasticité" überzeugen kann. Für die praktischen Zwecke des Ingenieur- und Maschinenfaches macht man sich die Sache sehr bequem, und kommt dennoch zu Resultaten, die wenigstens eben so genau sind als die genauesten, welche heut zu Tag die Physik aufzuweisen hat, mit Ausnahme der optischen. Handelt es sich um einen Stab, der durch äussere Kräfte gebogen wird, so nimmt man an: 1) dass alle Atome, welche ursprünglich in einem Querschnitt des Stabes lagen, nach erfolgter Biegung in einem auf der Biegungslinie normalen Querschnitt liegen; 2) dass die Atome eines und desselben Querschnittes durch die Biegung ihre relative Gegeneinanderlagerung nicht ändern; 3) dass alle ursprünglich geraden zur Axe des Stabes parallelen Fasern nach erfolgter Biegung äqui-distante

Linien bilden. Oder handelt es sich um die Drehung eines Stabes, so nimmt man an: 1) dass alle Atome, welche ursprünglich in einem Querschnitt liegen, durch die Drehung ihre relative Lage gegen einander nicht ändern; 2) dass der Winkel, um welchen zwei Querschnitte des Stabes durch die Drehung gegen einander gewendet werden, dem Abstand der Querschnitte proportional ist. Man nimmt also jedesmal bei jedem Problem gewisse Gegeneinander-Verschiebungen der Atome an, berechnet die diesen Verschiebungen entsprechenden Kräfte, indem man dieselben den Verschiebungen proportional setzt, und sucht hierauf die Bedingungen des Gleichgewichts.

Auf diese Weise umgeht man durch mehr oder weniger naturgemässe Annahmen die Hauptschwierigkeiten des Problems, nämlich die Bestimmung der Verschiebungen, kommt aber zu Resultaten, welche mit den Thatsachen in den meisten Fällen eben so gut stimmen, wie die bis jetzt im Gebiete der Physik durchgeführten Rechnungen. Allein durch diese leichte Behandlung dieser Aufgaben ist zunächst für die Wissenschaft nicht viel gewonnen, und werden die technischen Fragen keineswegs vollständig beantwortet. Denn es ist in dieser letzteren Hinsicht gerade von besonderer Wichtigkeit, die Umstände und Bedingungen kennen zu lernen, unter welchen diese Annahmen zulässig sind, denn nur dann, wenn dies der Fall ist, werden die Rechnungsresultate eine hinreichende Genauigkeit gewähren können, und nur dann, wenn im deformirten Zustand eines Körpers solche Atomlagerungen vorhanden sind, wie bei der Rechnung vorausgesetzt wird, kann dieser Körper als ein solides Glied einer technischen Construktion dienen; denn wenn z. B. an den unteren Kanten eines nach abwärts gebogenen stabförmigen Körpers nicht blos Zusammendrückungen, sondern gleichzeitig Faltungen eintreten, oder wenn dieser Körper auch zu einer Drehung leicht inclinirt, so kann derselbe nicht als ein solides Construktionsglied gelten.

Es ist daher für diese praktischen Fragen von grosser Wichtigkeit, die Bedingungen kennen zu lernen, unter welchen der deformirte Zustand eines Körpers gerade von der Art sein wird, wie bei der Rechnung vorausgesetzt wird, und diese Bedingungen können vermittelst der Gleichungen (17) und (18) ausfindig gemacht werden.

UMGESTALTUNG DER GLEICHGEWICHTSGLEICHUNGEN (17) UND (18).

Die Gleichungen (17) und (18) können in einer Weise umgestaltet werden, dass die Lösung der Gleichgewichtsprobleme elastischer Körper sehr vereinfacht wird.

Wir wollen einen Gleichgewichtszustand einen natürlichen nennen, wenn der Körper nur allein der Thätigkeit der inneren Kräfte überlassen ist, also keinerlei äussere Kräfte einwirken; dagegen einen erzwungenen, wenn auf den Körper nicht nur innere, sondern auch äussere Kräfte einwirken. Für den natürlichen Gleichgewichtszustand ist also zu setzen:

$$X = Y = Z = X_0 = Y_0 = Z_0 = o$$

Es seien nun für den natürlichen Gleichgewichtszustand des Körpers $x_0\ y_0\ z_0$ die Coordinaten eines Atoms A des Körpers, $x_0 + \Delta x_0$, $y_0 + \Delta y_0$, $z_0 + \Delta z_0$ die Coordinaten eines andern Atoms A_1 des gleichen Körpers. Wird nun dieser Körper durch die Einwirkung von äusseren Kräften $X\ Y\ Z\ X_1\ Y_1\ Z_1$ deformirt, so werden die Atome A und A_1 in dem nun erzwungenen Gleichgewichtszustand gewisse Positionen haben, deren Coordinaten wir beziehungsweise mit $x\ y\ z$, $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ bezeichnen wollen.

Nennen wir $\xi\ \upsilon\ \zeta$, $\xi + \Delta\xi$, $\upsilon + \Delta\upsilon$, $\zeta + \Delta\zeta$ die Aenderungen, welche in den Coordinaten der Atome A und A_1 bei dem Uebergang aus dem natürlichen Gleichgewichtszustand in den erzwungenen eingetreten sind; setzen demnach:

$$\left.\begin{array}{ll} \xi = x - x_0 & \xi + \Delta\xi = x + \Delta x - (x_0 + \Delta x_0) \\ \upsilon = y - y_0 & \upsilon + \Delta\upsilon = y + \Delta y - (y_0 + \Delta y_0) \\ \zeta = z - z_0 & \zeta + \Delta\zeta = z + \Delta z - (z_0 + \Delta z_0) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

so erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x = \Delta x_0 + \Delta\xi \\ \Delta y = \Delta y_0 + \Delta\upsilon \\ \Delta z = \Delta z_0 + \Delta\zeta \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Nennen wir endlich noch r_0 und $r_0 + \varrho$ die Entfernungen der Atome A und A_1 im natürlichen und im erzwungenen Gleichgewicht, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} r_0^2 = \Delta x_0^2 + \Delta y_0^2 + \Delta z_0^2 \\ (r_0 + \varrho)^2 = (\Delta x_0 + \Delta\xi)^2 + (\Delta y_0 + \Delta\upsilon)^2 + (\Delta z_0 + \Delta\zeta)^2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

Wir wollen von nun an voraussetzen, dass der Körper bei dem Uebergang aus dem natürlichen in den erzwungenen Gleichgewichtszustand nur um äusserst wenig deformirt werde; dann wird es erlaubt sein, im weiteren Verlauf der Rechnung $\Delta\xi\ \Delta\upsilon\ \Delta\zeta$ als unendlich kleine Grössen zu behandeln, und alle Glieder, welche zweite oder höhere Dimensionen dieser Grössen enthalten zu vernachlässigen.

Unter diesen Voraussetzungen folgt zunächst aus den Gleichungen (26):

$$\varrho = \frac{1}{r_0}\left(\Delta x_0\ \Delta\xi + \Delta y_0\ \Delta\upsilon + \Delta z_0\ \Delta\zeta\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

folgt ferner aus dem *Taylor*'schen Satz:

$$\frac{f(r)}{r} = \frac{f(r_0)}{r_0} + \frac{d\left(\frac{1}{r_0} f(r_0)\right)}{d r_0}\,\varrho$$

oder wenn man für ϱ seinen Werth aus (27) setzt:

$$\frac{f(r)}{r} = \frac{f(r_0)}{r_0} + \frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\,f(r_0)\right)}{d\,r_0}\,(\Delta x_0\,\Delta\xi + \Delta y_0\,\Delta\upsilon + \Delta z_0\,\Delta\zeta) \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Wenn man die Glieder, welche zweite Dimensionen von $\Delta\xi$ $\Delta\upsilon$ $\Delta\zeta$ enthalten, vernachlässigt, findet man aus (25):

$$\left.\begin{array}{l|l}
\Delta x^2 = \Delta x_0^2 + 2\,\Delta x_0\,\Delta\xi & \Delta x\,\Delta y = \Delta x_0\,\Delta y_0 + (\Delta x_0\,\Delta\upsilon + \Delta y_0\,\Delta\xi) \\
\Delta y^2 = \Delta y_0^2 + 2\,\Delta y_0\,\Delta\upsilon & \Delta x\,\Delta z = \Delta x_0\,\Delta z_0 + (\Delta x_0\,\Delta\zeta + \Delta z_0\,\Delta\xi) \\
\Delta z^2 = \Delta z_0^2 + 2\,\Delta z_0\,\Delta\zeta & \Delta y\,\Delta z = \Delta x_0\,\Delta z_0 + (\Delta y_0\,\Delta\zeta + \Delta z_0\,\Delta\upsilon)
\end{array}\right\} \quad (29)$$

Substituirt man diese Resultate (27), (28), (29) in die Gleichungen (17) und (18), setzt zur Abkürzung:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{m_1}{2}\,\frac{f(r_0)}{r_0} = \mathfrak{H} \\
\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\,f(r_0)\right)}{d\,r_0} = \mathfrak{K}
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

und berücksichtigt, dass im natürlichen Gleichgewicht:

$$\left.\begin{array}{l}
\Sigma\,m\,S\,\mathfrak{H}\,\Delta x_0^2 = o \\
\Sigma\,m\,S\,\mathfrak{H}\,\Delta y_0^2 = o \\
\Sigma\,m\,S\,\mathfrak{H}\,\Delta z_0^2 = o \\
\Sigma\,m\,S\,\mathfrak{H}\,\Delta x_0\,\Delta y_0 = o \\
\Sigma\,m\,S\,\mathfrak{H}\,\Delta x_0\,\Delta z_0 = o \\
\Sigma\,m\,S\,\mathfrak{H}\,\Delta y_0\,\Delta z_0 = o
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

ist, so erhalten die Gleichungen (17) und (18) folgende Gestalten:

$$\left.\begin{array}{l}
o = \Sigma\,m\,(X\,x + X_2\,x_2) + \Sigma\,m\,S\,\left[(2\,\mathfrak{H}\,\Delta x_0 + \mathfrak{K}\,\Delta x_0^3)\,\Delta\xi + \mathfrak{K}\,\Delta x_0^2\,\Delta y_0\,\Delta\upsilon + \mathfrak{K}\,\Delta x_0^2\,\Delta z_0\,\Delta\zeta\right] \\
o = \Sigma\,m\,(Y\,y + Y_2\,y_2) + \Sigma\,m\,S\,\left[(2\,\mathfrak{H}\,\Delta y_0 + \mathfrak{K}\,\Delta y_0^3)\,\Delta\upsilon + \mathfrak{K}\,\Delta y_0^2\,\Delta x_0\,\Delta\xi + \mathfrak{K}\,\Delta y_0^2\,\Delta z_0\,\Delta\zeta\right] \\
o = \Sigma\,m\,(Z\,z + Z_2\,z_2) + \Sigma\,m\,S\,\left[(2\,\mathfrak{H}\,\Delta z_0 + \mathfrak{K}\,\Delta z_0^3)\,\Delta\zeta + \mathfrak{K}\,\Delta z_0^2\,\Delta y_0\,\Delta\upsilon + \mathfrak{K}\,\Delta z_0^2\,\Delta x_0\,\Delta\xi\right]
\end{array}\right\} \quad (32)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
o &= \Sigma m\,(X\,y + X_2\,y_2) + \Sigma m\,S\,\Big[(\mathfrak{H}\,\Delta y_0 + \mathfrak{K}\,\Delta y_0\,\Delta x_0^2)\,\Delta\xi + (\mathfrak{H}\,\Delta x_0 + \mathfrak{K}\,\Delta x_0\,\Delta y_0^2)\,\Delta v + \\
&\qquad + \mathfrak{K}\,\Delta x_0\,\Delta y_0\,\Delta z_0\,\Delta\zeta\Big] \\
o &= \Sigma m\,(Y\,z + Y_2\,z_2) + \Sigma m\,S\,\Big[\mathfrak{K}\,\Delta x_0\,\Delta y_0\,\Delta z_0\,\Delta\xi + (\mathfrak{H}\,\Delta z_0 + \mathfrak{K}\,\Delta z_0\,\Delta y_0^2)\,\Delta v + \\
&\qquad + (\mathfrak{H}\,\Delta y_0 + \mathfrak{K}\,\Delta y_0\,\Delta z_0^2)\,\Delta\zeta\Big] \\
o &= \Sigma m\,(Z\,x + Z_2\,x_2) + \Sigma m\,S\,\Big[(\mathfrak{H}\,\Delta z_0 + \mathfrak{K}\,\Delta z_0\,\Delta x_0^2)\,\Delta\xi + \mathfrak{K}\,\Delta x_0\,\Delta y_0\,\Delta z_0\,\Delta v + \\
&\qquad + (\mathfrak{H}\,\Delta x_0 + \mathfrak{K}\,\Delta x_0\,\Delta z_0^2)\,\Delta\zeta\Big]
\end{aligned}
\right\} \quad (33)
$$

Ausserdem bestehen auch noch die Gleichungen (15) und (16), nämlich:

$$\Sigma m\,(X + X_2) = o \qquad \Sigma m\,(Y + Y_2) = o \qquad \Sigma m\,(Z + Z_2) = o \quad . \; . \; . \quad (34)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\Sigma m\,(X\,y - Y\,x) + \Sigma m\,(X_2\,y_2 - Y_2\,x_2) &= o \\
\Sigma m\,(Y\,z - Z\,y) + \Sigma m\,(Y_2\,z_2 - Z_2\,y_2) &= o \\
\Sigma m\,(Z\,x - X\,z) + \Sigma m\,(Z_2\,x_2 - X_2\,z_2) &= o
\end{aligned}
\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35)
$$

Vermittelst dieser Gleichungen (32), (33), (34), (35) können zwar nicht alle, aber doch sehr viele das Gleichgewicht elastischer Körper betreffende Aufgaben gelöst werden.

Man kann sich in dieser Hinsicht zweierlei Hauptfragen stellen. Man kann entweder die natürliche Gestalt des Körpers und das deformirende Kräftesystem als gegeben betrachten und die Deformirung zu bestimmen suchen. In diesem Falle sind die Kräfte $X\;Y\;Z\;X_2\;Y_2\;Z_2$, so wie die Coordinaten $x_0\;y_0\;z_0$ gegeben, und sind die Coordinaten $\xi\;v\;\zeta$, so wie die Differenzen $\Delta\xi\;\Delta v\;\Delta\zeta$ zu suchen. In dieser Weise wird gewöhnlich bei analytischen Behandlungen die Frage gestellt; ihre Beantwortung führt aber unvermeidlich zu enormen Schwierigkeiten, weil die Verschiebungen $\xi\;v\;\zeta$ meistens äusserst complizirte Grössen sind. Man kann aber auch die Frage umkehren, indem man die Gestalt des Körpers und die Verschiebungen annimmt, die ja ganz beliebig sein können, dagegen das Kräftesystem zu bestimmen sucht, welches diese angenommenen Verschiebungen hervorzubringen vermag. Diese umgekehrte Fragestellung ist eigentlich diejenige, welche gewöhnlich bei technischen Aufgaben gestellt wird.

Um die Anwendung der erhaltenen Gleichungen zu zeigen, wollen wir einige Aufgaben lösen.

ZUSAMMENDRÜCKUNG EINES PARALLELEPIPEDISCHEN KÖRPERS.

Ein Körper habe im natürlichen Zustand die Gestalt eines Parallelepipeds. Das Material sei nicht nach allen Richtungen gleich leicht zusammendrückbar. Die Elastizitätsaxen seien den Kanten des Körpers parallel. Wir versetzen diesen Körper in einen andern Zustand, in welchem derselbe nach den Richtungen seiner Kanten gleichförmig zusammengedrückt ist, jedoch nach jeder Kantenrichtung in einem andern Maasse, und

stellen uns die Frage, die Kräfte zu bestimmen, welche einen solchen Zustand herbeiführen können. In diesem Falle ist das Kräftesystem seiner Art nach leicht zu errathen. Wir müssen nämlich zunächst die auf die einzelnen Atome einwirkenden äusseren Kräfte $X m$ $Y m$ $Z m$ gleich Null setzen, und müssen ferner gegen die parallelen Flächen des Körpers gleichförmig vertheilte Pressungen von einer gewissen Intensität wirken lassen.

Legen wir das Coordinatensystem $O x$ $O y$ $O z$ so, dass der Anfangspunkt der Coordinaten mit dem Mittelpunkt einer Fläche des Parallelepipeds und dass die Axe $O x$ mit der geometrischen Axe der Gestalt des Körpers zusammenfällt, dass ferner die Axen $O y$ und $O z$ mit den beiden andern Kanten parallel werden, und nennen wir α β γ die linearen Verkürzungen des Parallelepipedes nach den Richtungen der Axen $O x$ $O y$ $O z$, dann ist offenbar zu setzen:

$$\begin{aligned} \Delta \xi &= -\alpha \, \Delta x_0 \\ \Delta \upsilon &= -\beta \, \Delta y_0 \\ \Delta \zeta &= -\gamma \, \Delta z_0 \end{aligned} \qquad \qquad (36)$$

Ferner:

$$X = Y = Z = o$$

Nennen wir ferner a b c die den Axen $O x$ $O y$ $O z$ parallelen Seiten des Körpers, $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{Y}$ $\mathfrak{Z}$ die Pressungen, welche gegen jede Flächeneinheit der Begränzungsflächen $b c$ $a c$ $a b$ des Körpers wirken müssen, um die vorgeschriebenen Zusammenpressungen zu bewirken, so hat man:

$$\Sigma m \, (X x + X_1 x_1) = - a b c \mathfrak{X}$$

$$\Sigma m \, (Y y + Y_1 y_1) = - a b c \mathfrak{Y}$$

$$\Sigma m \, (Z z + Z_1 z_1) = - a b c \mathfrak{Z}$$

Die Gleichungen (32) werden demnach in diesem Falle:

$$+ a b c \mathfrak{X} = - \Sigma m S \left[(2 \mathfrak{H} \Delta x_0 + \mathfrak{K} \Delta x_0^2) \alpha \Delta x_0 + \mathfrak{K} \Delta x_0^2 \Delta y_0^2 \beta + \mathfrak{K} \Delta x_0^2 \Delta z_0^2 \gamma \right]$$

$$+ a b c \mathfrak{Y} = - \Sigma m S \left[(2 \mathfrak{H} \Delta y_0 + \mathfrak{K} \Delta y_0^2) \beta \Delta y_0 + \mathfrak{K} \Delta x_0^2 \Delta y_0^2 \alpha + \mathfrak{K} \Delta y_0^2 \Delta z_0^2 \gamma \right]$$

$$+ a b c \mathfrak{Z} = - \Sigma m S \left[(2 \mathfrak{H} \Delta z_0 + \mathfrak{K} \Delta z_0^2) \gamma \Delta z_0 + \mathfrak{K} \Delta z_0^2 \Delta y_0^2 \beta + \mathfrak{K} \Delta z_0^2 \Delta x_0^2 \alpha \right]$$

Allein weil bei der vorausgesetzten Verschiebung der Atome im erzwungenen Gleichgewichtszustand die Gruppirungsweise der Atome um jedes Atom herum ganz die gleiche ist, so haben die Summen S für alle Punkte den gleichen Werth; man erhält daher die durch Σ angedeuteten Summen, wenn man die Masse m jedes Atoms mit der gleichen Summe S multiplizirt und alles addirt; und folglich kann man schreiben:

11.

$$\left.\begin{aligned} -\,a\,b\,c\,\mathfrak{X} &= -\,M\,S\left[(2\,\mathfrak{H}\,\Delta x_0^2 + \mathfrak{K}\,\Delta x_0^4)\,\alpha + \mathfrak{K}\,\Delta x_0^2\,\Delta y_0^2\,\beta + \mathfrak{K}\,\Delta x_0^2\,\Delta z_0^2\,\gamma\right] \\ +\,a\,b\,c\,\mathfrak{Y} &= -\,M\,S\left[\mathfrak{K}\,\Delta x_0^2\,\Delta y_0^2\,\alpha + (2\,\mathfrak{H}\,\Delta y_0^2 + \mathfrak{K}\,\Delta y_0^4)\,\beta + \mathfrak{K}\,\Delta y_0^2\,\Delta z_0^2\,\gamma\right] \\ +\,a\,b\,c\,\mathfrak{Z} &= -\,M\,S\left[\mathfrak{K}\,\Delta x_0^2\,\Delta z_0^2\,\alpha + \mathfrak{K}\,\Delta y_0^2\,\Delta z_0^2\,\beta + (2\,\mathfrak{H}\,\Delta z_0^2 + \mathfrak{K}\,\Delta z_0^4)\,\gamma\right] \end{aligned}\right\} \quad . \quad (37)$$

wobei M die Masse des Körpers bezeichnet.

Berücksichtigt man, dass im natürlichen Gleichgewichtszustand wegen Gleichung (31)

$$M\,S\,\mathfrak{H}\,\Delta x_0^2 = 0 \qquad M\,S\,\mathfrak{H}\,\Delta y_0^2 = 0 \qquad M\,S\,\mathfrak{H}\,\Delta z_0^2 = 0$$

ist, setzt zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned} S\,\mathfrak{K}\,\Delta x_0^4 &= S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\,f(r_0)\right)}{d\,r_0}\,\Delta x_0^4 = -\,\mathfrak{L} \\ S\,\mathfrak{K}\,\Delta y_0^4 &= S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\,f(r_0)\right)}{d\,r_0}\,\Delta y_0^4 = -\,\mathfrak{M} \\ S\,\mathfrak{K}\,\Delta z_0^4 &= S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\,f(r_0)\right)}{d\,r_0}\,\Delta z_0^4 = -\,\mathfrak{N} \\ S\,\mathfrak{K}\,\Delta x_0^2\,\Delta y_0^2 &= S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\,f(r_0)\right)}{d\,r_0}\,\Delta x_0^2\,\Delta y_0^2 = -\,\mathfrak{P} \\ S\,\mathfrak{K}\,\Delta y_0^2\,\Delta z_0^2 &= S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\,f(r_0)\right)}{d\,r_0}\,\Delta y_0^2\,\Delta z_0^2 = -\,\mathfrak{Q} \\ S\,\mathfrak{K}\,\Delta z_0^2\,\Delta x_0^2 &= S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\,f(r_0)\right)}{d\,r_0}\,\Delta z_0^2\,\Delta x_0^2 = -\,\mathfrak{R} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (38)$$

und berücksichtigt noch, dass $\frac{M}{a\,b\,c} = \frac{s_0}{2\,g}$ ist, wobei s_0 das spezifische Gewicht des Körpers im natürlichen Zustand bezeichnet, so findet man aus (37):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{X} &= \frac{s_0}{2\,g}\,(\alpha\,\mathfrak{L} + \beta\,\mathfrak{P} + \gamma\,\mathfrak{R}) \\ \mathfrak{Y} &= \frac{s_0}{2\,g}\,(\alpha\,\mathfrak{P} + \beta\,\mathfrak{M} + \gamma\,\mathfrak{Q}) \\ \mathfrak{Z} &= \frac{s_0}{2\,g}\,(\alpha\,\mathfrak{R} + \beta\,\mathfrak{Q} + \gamma\,\mathfrak{N}) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39)$$

Dies sind endlich die Intensitäten der Pressungen gegen die Flächen des Parallelepipeds, durch welche nach den Richtungen der Axen $O\,x$ $O\,y$ $O\,z$ die linearen Zusammendrückungen α β γ hervorgebracht werden.

Diese Ausdrücke werden für eine isotrope Gruppirung der Atome sehr einfach. Es ist nämlich in diesem Falle:

$$\left.\begin{array}{c} \mathfrak{P} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{R} \\ \mathfrak{L} = \mathfrak{M} = \mathfrak{N} = 3\,\mathfrak{R} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

Diese Gleichheiten sind selbstverständlich, mit Ausnahme der letzten, die eines Beweises bedarf, den zuerst *Cauchy* in seiner Lichttheorie in folgender Weise gegeben hat.

Legen wir durch den Punkt $x\,y\,z$ zwei Coordinatensysteme $O\,\varDelta x_0$ $O\,\varDelta y_0$ $O\,\varDelta z_0$ $O\,\varDelta x_1$ $O\,\varDelta y_1$ $O\,\varDelta z_1$ in solcher Weise, dass die Axen $O\,\varDelta z_0$ und $O\,\varDelta z_1$ zusammenfallen und mit der Axe $O\,z$ parallel sind, dass jedoch die Axen $O\,\varDelta x_0$ und $O\,\varDelta x_1$ einen beliebigen Winkel ψ bilden. Dies vorausgesetzt, haben wir:

$$\varDelta x_1 = \varDelta x_0 \cos.\psi - \varDelta y_0 \sin.\psi$$

$$\varDelta y_1 = \varDelta x_0 \sin.\psi + \varDelta y_0 \cos.\psi$$

Hieraus folgt:

$$\varDelta x_1^4 = \varDelta x_0^4 \cos.^4\psi - 4\,\varDelta x_0^3\,\varDelta y_0 \cos.^3\psi \sin.\psi + 6\,\varDelta x_0^2\,\varDelta y_0^2 \sin.^2\psi \cos.^2\psi - 4\,\varDelta x_0\,\varDelta y_0^3 \cos.\psi \sin.^3\psi + \varDelta y_0^4 \sin.^4\psi$$

$$\varDelta y_1^4 = \varDelta x_0^4 \sin.^4\psi + 4\,\varDelta x_0^3\,\varDelta y_0 \sin.^3\psi \cos.\psi + 6\,\varDelta x_0^2\,\varDelta y_0^2 \sin.^2\psi \cos.^2\psi + 4\,\varDelta x_0\,\varDelta y_0^3 \sin.\psi \cos.^3\psi + \varDelta y_0^4 \cos.^4\psi$$

Ist nun die Gruppirungsweise der Atome um die Axe $O\,\varDelta z$ herum ganz gleich, so muss sein:

$$-L = S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_0} f(r_0)\right)}{d\,r_0}\,\varDelta x_0^4 = S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_0} f(r_0)\right)}{d\,r_0}\,\varDelta x_1^4$$

$$-M = S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_0} f(r_0)\right)}{d\,r_0}\,\varDelta y_0^4 = S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_0} f(r_0)\right)}{d\,r_0}\,\varDelta y_1^4$$

Setzt man für $\varDelta x_1^4$ und $\varDelta y_1^4$ die vorhergehenden Werthe und berücksichtigt, dass überhaupt für jedes homogene Medium alle Summen verschwinden, in welchen ungerade Potenzen von $\varDelta x_0$ $\varDelta y_0$ $\varDelta z_0$ vorkommen, so findet man:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L} \cos.^4\psi + \mathfrak{M} \sin.^4\psi + 6\,\mathfrak{R} \sin.^2\psi \cos.^2\psi$$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{L} \sin.^4\psi + \mathfrak{M} \cos.^4\psi + 6\,\mathfrak{R} \sin.^2\psi \cos.^2\psi$$

Hieraus folgt zunächst $\mathfrak{L} = \mathfrak{M}$, und dann wird:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L} \, (\cos.^4 \psi + \sin.^4 \psi) + 6 \, \mathfrak{N} \sin.^2 \psi \cos.^2 \psi$$

Es ist aber:

$$\cos.^4 \psi + \sin.^4 \psi = 1 - 2 \sin.^2 \psi \cos.^2 \psi$$

daher:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L} - 2 \, \mathfrak{L} \sin.^2 \psi \cos.^2 \psi + 6 \sin.^2 \psi \cos.^2 \psi \, \mathfrak{N}$$

oder:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{M} = 3 \, \mathfrak{N}$$

was zu beweisen war. Vermöge der für ein isotropes Medium bestehenden Beziehungen (40) werden die Gleichungen (39):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{X} &= \frac{s_0}{2\,g} \, \mathfrak{L} \left[\alpha + \frac{1}{3} (\beta + \gamma)\right] \\ \mathfrak{Y} &= \frac{s_0}{2\,g} \, \mathfrak{L} \left[\beta + \frac{1}{3} (\alpha + \gamma)\right] \\ \mathfrak{Z} &= \frac{s_0}{2\,g} \, \mathfrak{L} \left[\gamma + \frac{1}{3} (\alpha + \beta)\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

Dies sind nun für einen parallelepipedischen Stab, der aus einer isotropen Substanz besteht, die Intensitäten der Pressungen gegen die parallelen Begränzungsflächen, welche nach den Richtungen der Kräfte die linearen Zusammenpressungen $\alpha \; \beta \; \gamma$ hervorbringen. Umgekehrt kann man aus den Gleichungen (41) $\alpha \; \beta \; \gamma$ durch $\mathfrak{X} \; \mathfrak{Y} \; \mathfrak{Z}$ ausdrücken, also die linearen Zusammenpressungen berechnen, welche durch diese Kräfte entstehen.

Man findet:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{3}{10} \left[4\,\mathfrak{X} - (\mathfrak{Y} + \mathfrak{Z})\right] \frac{2\,g}{s_0\,\mathfrak{L}} \\ \beta &= \frac{3}{10} \left[4\,\mathfrak{Y} - (\mathfrak{X} + \mathfrak{Z})\right] \frac{2\,g}{s_0\,\mathfrak{L}} \\ \gamma &= \frac{3}{10} \left[4\,\mathfrak{Z} - (\mathfrak{X} + \mathfrak{Y})\right] \frac{2\,g}{s_0\,\mathfrak{L}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

Die Volumenänderung einer Volumseinheit ist daher:

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{3}{10} \, (2\,\mathfrak{X} + 2\,\mathfrak{Y} + 2\,\mathfrak{Z}) \, \frac{2\,g}{s_0\,\mathfrak{L}}$$

Die Gleichungen (33), (34), (35) werden bei dem vorliegenden Problem identisch erfüllt. Betrachten wir einige spezielle Fälle.

1. Haben die gegen die Seitenflächen des Prisma wirkenden Kräfte gleiche Intensitäten, ist also:

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z}$$

so findet man aus dieser Gleichung (42):

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{3}{5}\,\frac{2g}{s_0\,\mathfrak{L}}\,\mathfrak{X} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

2. Wird der Stab nach der Richtung $o\,x$ zusammengedrückt und wirken sonst keine Kräfte auf denselben ein, ist also:

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} = o$$

so geben die Gleichungen (42) folgende Werthe:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{6}{5}\,\frac{2g}{s_0\,\mathfrak{L}}\,\mathfrak{X} \\ \beta = \gamma &= -\frac{3}{10}\,\frac{2g}{s_0\,\mathfrak{L}}\,\mathfrak{X} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

Der Stab dehnt sich also nach der Quere aus, und es ist:

$$\beta = \gamma = -\frac{\alpha}{4}$$

3. Will man nur allein eine Zusammendrückung nach der Richtung $o\,x$ bewirken, und die Querschnittsänderung nach den Richtungen $o\,y$ $o\,z$ verhindern, so sind gewisse Pressungen $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ nothwendig. Für diesen Fall ist:

$$\beta = \gamma = o$$

und die Gleichungen (41) geben:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{2g}{s_0\,\mathfrak{L}}\,\mathfrak{X} \\ \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} &= \frac{1}{3}\,\frac{s_0\,\mathfrak{L}}{2g}\,\alpha = \frac{1}{3}\,\mathfrak{X} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

Den reziproken Werth der Grösse $\frac{6}{5}\,\frac{2g}{s_0\,\mathfrak{L}}$, welche vermöge (44) die lineare Ausdehnung oder Zusammendrückung ausdrückt, welche entsteht, wenn auf den Stab nur dehnende oder nur zusammendrückende Kräfte wirken, deren Intensität = 1 ist, nennt man den Modulus der Elastizität des Materials. Wir bezeichnen denselben mit ε, setzen also:

$$\varepsilon = \frac{5}{6}\,\frac{s_0\,\mathfrak{L}}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

Diese Ergebnisse (43) bis (46) unserer Rechnung stimmen mit den analogen von *Cauchy* und *Lamé* gefundenen überein, wollen aber mit den von *Wertheim* gefundenen Versuchsresultaten nicht genau harmoniren. Der Grund hievon liegt nach meiner Ansicht wahrscheinlich in einer ungenauen Berechnung der Doppelsummen

$$\Sigma \, m \, S \, (\ldots.)$$

Die Summe S bezieht sich auf alle $\Delta x \; \Delta y \; \Delta z$, d. h. auf alle Punkte, die um einen gewissen Punkt $x \; y \; z$ herumgelagert sind; die Summe Σ dagegen überhaupt auf alle $x \; y \; z$, d. h. auf alle Punkte des Körpers. Nun haben wir angenommen, dass die Summe $S \, (\ldots)$ für jeden Punkt des Körpers ein und denselben Werth habe, und dies ist selbst bei einem isotropen Medium nur für die innern, nicht aber für die an der Oberfläche und in der Nähe derselben gelegenen Punkte richtig, denn jeder begränzte Körper hat, wie die Erfahrung beweist und wie auch aus unserer Theorie mit Nothwendigkeit folgt, so zu sagen ein Häutchen, in welchem eine andere Dichte stattfindet, als im Innern des Körpers. Es ist also bei der Berechnung jener Doppelsumme nicht erlaubt, $S \, (\ldots)$ für alle Punkte als constant zu betrachten und

$$\Sigma \, m \, S \, (\ldots.) = M \, S \, (\ldots.)$$

zu setzen.

WIRKUNG, WELCHE DER DEFORMIRUNG EINES KÖRPERS ENTSPRICHT.

Wir legen uns nun die Aufgabe vor, die Wirkungsgrösse oder Arbeitsgrösse zu bestimmen, welche einer Deformirung eines elastischen Körpers entspricht.

Es sei r_0 die Entfernung zweier Atome A und B im natürlichen Zustand des Körpers; $r_0 + \rho$ die Entfernung der gleichen Atome in irgend einem Augenblick während der Deformirung; $d \, (r_0 + \rho) = d \, \rho$ die Zunahme der Entfernung der gleichen Atome, während die Deformirung noch unendlich wenig weiter fortschreitet, so ist:

$$m \, m_1 \, f \, (r_0 + \rho) \, d \, \rho$$

die Arbeit, welche der Distanzänderung der Atome A und B um $d \, \rho$ entspricht, demnach

$$\int_0^\rho m \, m_1 \, f \, (r_0 + \rho) \, d \, \rho$$

die Arbeit, welche einer Distanzänderung ρ entspricht.

Wenn wir überhaupt nur eine schwache Deformirung voraussetzen, ist ρ gegen r_0 sehr klein; wir können daher nach dem *Taylor*'schen Satz schreiben:

$$f \, (r_0 + \rho) = f \, (r_0) + \frac{d \, f \, (r_0)}{d \, r_0} \, \rho$$

Demnach wird:

$$\int m\, m_1\, f(r_0 + \varrho)\, d\varrho = m\, m_1 \int \left[f(r_0) + \frac{d f(r_0)}{d r_0} \varrho \right] d\varrho$$

$$= m\, m_1 \left[f(r_0)\, \varrho + \frac{1}{2} \frac{d f(r_0)}{d r_0} \varrho^2 \right]$$

und hiermit ist die Arbeit berechnet, um zwei Atome aus der Entfernung r_0, welche sie im natürlichen Zustand haben, in die Entfernung $r_0 + \varrho$ zu bringen, und es ist nun ferner:

$$W = \frac{1}{2} \Sigma\, m\, S\, m_1 \left[f(r_0)\, \varrho + \frac{1}{2} \frac{d f(r_0)}{d r_0} \varrho^2 \right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

die totale Arbeit, welche durch die Distanzänderung aller Atome entwickelt wird.

Hierbei bezieht sich das Zeichen S auf die Aenderung der Entfernungen aller Atome B gegen das Atom A. Das Zeichen Σ hingegen bezieht sich überhaupt auf alle Punkte A des Körpers.

Wegen der Kleinheit von ϱ können wir auch hier wiederum schreiben:

$$\varrho = \frac{1}{r_0} (\Delta x_0\, \Delta \xi + \Delta y_0\, \Delta v + \Delta z_0\, \Delta \zeta) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

und wenn wir diesen Werth in (1) einführen, finden wir:

$$W = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \Sigma\, m\, S\, m_1 \left[f(r_0) \frac{1}{r_0} (\Delta x_0\, \Delta \xi + \Delta y_0\, \Delta v + \Delta z_0\, \Delta \zeta) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{d f(r_0)}{d r_0} \frac{1}{r_0^2} (\Delta x_0\, \Delta \xi + \Delta y_0\, \Delta v + \Delta z_0\, \Delta \zeta)^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad . \; . \; . \quad (3)$$

Dieser Ausdruck liesse sich noch weiter analytisch ausbilden, er kann jedoch auch in der Form (3) ganz gut gebraucht werden, wenn die durch die Deformirung entstehenden Verschiebungen der Punkte als gegebene Grössen angesehen werden dürfen.

DREHUNG EINES STABES.

Wir wollen diesen Ausdruck benützen, um die Arbeit zu berechnen, welche einer Verdrehung eines cylindrischen Stabes entspricht.

Wenn wir annehmen: 1) dass bei einer Drehung des Stabes alle Atome, welche im ursprünglichen Zustand in einem und demselben Querschnitt lagen, durch die Drehung ihre relative Lage gegen einander nicht ändern; 2) dass alle Atome, welche im natürlichen Zustand eine zur Axe des Stabes parallele Faser bildeten, durch die Drehung des Stabes die Gestalt einer Schraubenlinie annehmen; 3) dass die Axe der x in die

geometrische Axe des Cylinders gelegt wird, so erhalten wir für die Verschiebung $\xi\ v\ \zeta$ irgend eines Punktes, dessen Coordinaten im natürlichen Zustand $x_0\ y_0\ z_0$ sind, folgende Werthe:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= 0 \\ v &= -\frac{\Theta}{l}\, x_0 z_0 \\ \zeta &= +\frac{\Theta}{l}\, x_0 y_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

wobei l die Länge des Cylinders und Θ den Winkel bezeichnet, um welchen die Endflächen des Stabes gegen einander verdreht sind.

Aus (4) folgt:

$$\begin{aligned} \Delta\xi &= 0 \\ \Delta v &= -\frac{\Theta}{l}\Big[(x_0+\Delta x_0)(z_0+\Delta z_0) - x_0 z_0\Big] \\ \Delta\zeta &= +\frac{\Theta}{l}\Big[(x_0+\Delta x_0)(y_0+\Delta y_0) - x_0 y_0\Big] \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} \Delta\xi &= 0 \\ \Delta v &= -\frac{\Theta}{l}\,(x_0\,\Delta z_0 + z_0\,\Delta x_0 + \Delta x_0\,\Delta z_0) \\ \Delta\zeta &= +\frac{\Theta}{l}\,(x_0\,\Delta y_0 + y_0\,\Delta x_0 + \Delta x_0\,\Delta y_0) \end{aligned}$$

und man findet nun ferner:

$$\Delta x_0\,\Delta\xi + \Delta y_0\,\Delta v + \Delta z_0\,\Delta\zeta = \frac{\Theta}{l}\,(y_0\,\Delta x_0\,\Delta z_0 - z_0\,\Delta x_0\,\Delta y_0)$$

Substituirt man diesen Ausdruck in (3) und berücksichtigt, dass $y_0\ z_0$ vor das Summenzeichen S, nicht aber vor das Summenzeichen Σ gesetzt werden dürfen, berücksichtig aber auch noch, dass alle Glieder der Summe S verschwinden, in welchen nur gerade Potenzen von $\Delta x_0\ \Delta y_0\ \Delta z_0$ vorkommen, so erhält man:

$$W = -\frac{1}{2}\,\frac{\Theta^2}{l^2}\,\Sigma\,(m\mathfrak{A}\,y_0^2 + m\mathfrak{B}\,z_0^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} &= -S\,\frac{m}{2}\,\frac{d f(r_0)}{d r_0}\,\frac{\Delta x_0^2\,\Delta z_0^2}{r_0^3} \\ \mathfrak{B} &= -S\,\frac{m}{2}\,\frac{d f(r_0)}{d r_0}\,\frac{\Delta x_0^2\,\Delta y_0^2}{r_0^3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Für ein nach allen Richtungen gleich elastisches Medium ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, und dann wird

$$W = -\frac{1}{2}\frac{\Theta^2}{l^2}\Sigma(m y_0^2 + m z_0^2)\mathfrak{A} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Allein es ist $\Sigma m (y_0^2 + z_0^2)$ das als Masse ausgedrückte Trägheitsmoment des Cylinders in Bezug auf seine geometrische Axe, oder es ist:

$$\Sigma m (y_0^2 + z_0^2) = \frac{\pi}{4g} s_0 \, l \, A^4$$

wobei s_0 das Gewicht der Kubikeinheit des Materials bezeichnet, aus welchem der Cylinder besteht, l die Länge, A den Halbmesser des Cylinders. Wir erhalten daher:

$$W = -\frac{\pi}{8g}\mathfrak{A}\frac{\Theta^2 A^4}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Für eine schwache Drehung aus dem natürlichen Zustand in einen erzwungenen um einen Torsionswinkel Θ ist aber eine äussere Wirkung $\frac{1}{2} P R \Theta$ nothwendig. Wir erhalten daher:

$$\frac{1}{2} P R \Theta + \left(-\frac{\pi}{8g}\mathfrak{A}\frac{\Theta^2 \mathfrak{A}^4}{l}\right) = 0$$

und hieraus folgt:

$$\Theta = \frac{4g}{\pi\mathfrak{A}}\frac{P R l}{A^4}$$

Die Constante $\frac{\pi\mathfrak{A}}{2g}$ nennt man den Modulus der Elastizität des Materials für Torsion; bezeichnet man denselben mit G, setzt also:

$$G = \frac{\pi\mathfrak{A}}{4g}$$

so wird schliesslich:

$$\Theta = \frac{P R l}{G A^4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

WIRKUNGSGRÖSSE, WELCHE EINER ZUSAMMENDRÜCKUNG ODER AUSDEHNUNG EINES RECHTWINKLIGEN PRISMAS ENTSPRICHT.

Nehmen wir an, ein rechtwinkliges Prisma werde nach den Richtungen seiner drei Axen gleichförmig ausgedehnt, und es seien die linearen Ausdehnungen nach den drei Axen Ox Oy Oz, beziehungsweise α β γ, dann ist:

$$\Delta \xi = \alpha \, \Delta x_0$$

$$\Delta \upsilon = \beta \, \Delta y_0$$

$$\Delta \zeta = \gamma \, \Delta z_0$$

demnach:

$$\Delta x_0 \, \Delta \xi + \Delta y_0 \, \Delta \upsilon + \Delta z_0 \, \Delta \zeta = \alpha \, \Delta x_0^2 + \beta \, \Delta y_0^2 + \gamma \, \Delta z_0^2$$

und folglich wird:

$$W = \frac{1}{2} \Sigma m \, S \, m_1 \left\{ \begin{array}{l} \frac{f(r_0)}{r_0} (\alpha \Delta x_0^2 + \beta \Delta y_0^2 + \gamma \Delta z_0^2) + \\ + \frac{1}{2} \frac{d f(r_0)}{d r_0} \frac{1}{r_0^2} (\alpha \Delta x_0^2 + \beta \Delta y_0^2 + \gamma \Delta z_0^2)^2 \end{array} \right\}$$

oder:

$$W = \frac{1}{2} \Sigma m \left\{ \begin{array}{l} \alpha \, S \, m_1 \frac{f(r_0)}{r_0} \Delta x_0^2 + \beta \, S \, m_1 \frac{f(r_0)}{r_0} \Delta y_0^2 + \gamma \, S \, m_1 \frac{f(r_0)}{r_0} \Delta z_0^2 \\ + \alpha^2 S \frac{m_1}{2} \frac{d f(r_0)}{d r_0} \frac{\Delta x_0^4}{r_0^2} + \beta^2 S \frac{m_1}{2} \frac{d f(r_0)}{d r_0} \frac{\Delta y_0^4}{r_0^2} + \gamma^2 S \frac{m_1}{2} \frac{d f(r_0)}{d r_0} \frac{\Delta z_0^4}{r_0^2} \\ + 2 \alpha \beta \, S \frac{m_1}{2} \frac{d f(r_0)}{d r_0} \frac{\Delta x_0^2 \Delta y_0^2}{r_0^2} + 2 \alpha \gamma \, S \frac{m_1}{2} \frac{d f(r_0)}{d r_0} \frac{\Delta x_0^2 \Delta z_0^2}{r_0^2} \\ + 2 \beta \gamma \, S \frac{m_1}{2} \frac{d f(r_0)}{d r_0} \frac{\Delta y_0^2 \Delta z_0^2}{r_0^2} \end{array} \right\}$$

Berücksichtigt man, dass wegen Gleichungen (31), Seite 81

$$S \, m_1 \frac{f(r_0)}{r_0} \Delta x_0^2 = 0 \qquad S \, m_1 \frac{f(r_0)}{r_0} \Delta y_0^2 = 0 \qquad S \, m_1 \frac{f(r_0)}{r_0} \Delta z_0^2 = 0$$

ist, setzt zur Abkürzung:

$$- S \frac{m_1}{2} \frac{d f(r_0)}{d r_0} \frac{\Delta x_0^4}{r_0^2} = \mathfrak{L}$$

$$- S \frac{m_1}{2} \frac{d f(r_0)}{d r_0} \frac{\Delta y_0^4}{r_0^2} = \mathfrak{M}$$

$$- S \frac{m_1}{2} \frac{d f(r_0)}{d r_0} \frac{\Delta z_0^4}{r_0^2} = \mathfrak{N}$$

$$- S \frac{m_1}{2} \frac{d f(r_0)}{d r_0} \frac{\varDelta x_0^2 \varDelta y_0^2}{r_0^3} = \mathfrak{P}$$

$$- S \frac{m_1}{2} \frac{d f(r_0)}{d r_0} \frac{\varDelta y_0^2 \varDelta z_0^2}{r_0^3} = \mathfrak{Q}$$

$$- S \frac{m_1}{2} \frac{d f(r_0)}{d r_0} \frac{\varDelta z_0^2 \varDelta x_0^2}{r_0^3} = \mathfrak{R}$$

und berücksichtigt ferner noch, dass die Summen S für alle Punkte des Körpers einerlei Werth haben, so findet man:

$$W = -\frac{1}{2} M (\alpha^2 \mathfrak{L} + \beta^2 \mathfrak{M} + \gamma^2 \mathfrak{N} + 2 \alpha \beta \mathfrak{P} + 2 \alpha \gamma \mathfrak{R} + 2 \beta \gamma \mathfrak{Q})$$

Allein für eine schwache, aber gleichförmige Ausdehnung eines rechtwinkligen Prismas nach seinen drei Axen ist die Wirkung der äusseren Kräfte, welche diese Ausdehnungen hervorbringen können:

$$\frac{1}{2} \left[\mathfrak{X} (b c) \alpha a + \mathfrak{Y} (a c) \beta b + \mathfrak{Z} (a b) \gamma c \right] = \frac{1}{2} V (\alpha \mathfrak{X} + \beta \mathfrak{Y} + \gamma \mathfrak{Z})$$

wobei V das Volumen des Körpers bedeutet. Wir erhalten daher:

$$\frac{1}{2} V (\alpha \mathfrak{X} + \beta \mathfrak{Y} + \gamma \mathfrak{Z}) =$$
$$+ \frac{1}{2} M (\alpha^2 \mathfrak{L} + \beta^2 \mathfrak{M} + \gamma^2 \mathfrak{N} + 2 \alpha \beta \mathfrak{P} + 2 \alpha \gamma \mathfrak{R} + 2 \beta \gamma \mathfrak{Q})$$

oder weil $\frac{M}{V} = \frac{s_0}{2 g}$ ist:

$$\alpha \mathfrak{X} + \beta \mathfrak{Y} + \gamma \mathfrak{Z} = \frac{s_0}{2 g} (\alpha^2 \mathfrak{L} + \beta^2 \mathfrak{M} + \gamma^2 \mathfrak{N} + 2 \alpha \beta \mathfrak{P} + 2 \alpha \gamma \mathfrak{R} + 2 \beta \gamma \mathfrak{Q})$$

Ist die Elastizität des Stoffes nach allen Richtungen gleich gross, so ist:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{R}$$
$$\mathfrak{L} = \mathfrak{M} = \mathfrak{N} = 3 \mathfrak{R}$$

und dann wird:

$$\alpha \mathfrak{X} + \beta \mathfrak{Y} + \gamma \mathfrak{Z} =$$

$$= \frac{s_a}{2g} \left\{ \alpha \left| \alpha - \frac{1}{3} (\beta - \gamma) \right| + \beta \left| \beta - \frac{1}{3} (\alpha + \gamma) \right| + \gamma \left| \gamma - \frac{1}{3} (\alpha - \beta) \right| \right\} \mathfrak{E}$$

Diese Gleichung folgt auch aus den Gleichungen (41), Seite 86, wenn man dieselben mit $\alpha\ \beta\ \gamma$ multiplizirt und dann die Summe nimmt.

DRITTER ABSCHNITT.

Bewegung eines Dynamidensystems.

A. Körperschwingungen oder Bewegung der wägbaren Atome.

AUFSTELLUNG DER BEWEGUNGSGLEICHUNGEN.

Die Schwingungen der wägbaren Atome sind schon oftmals analytisch behandelt worden, und es ist nicht meine Absicht, zu den schon vorhandenen Behandlungen dieses Gegenstandes eine neue hinzuzufügen; allein die Differenzialgleichungen der Bewegung eines Systems von wägbaren Atomen muss ich dennoch herleiten und aufstellen, theils um zu zeigen, wie diese aus dem Dynamidensystem hervorgehen, insbesondere aber, um den Unterschied zwischen Körper- und Aetherschwingungen klar hervorheben zu können, was bisher noch nicht geschehen ist, und was namentlich auch *Cauchy* nicht gethan hat.

Es ist kaum nothwendig, zu sagen, dass wir nur mässige, d. h. solche Erschütterungen betrachten werden, für welche man, wie schon in der Einleitung, Seite 25, auseinandergesetzt wurde, annehmen darf, dass Aetherschwingungen keine Körperschwingungen, und Körperschwingungen keine Aetherschwingungen hervorrufen.

Wir denken uns also, dass die Körperatome eines Dynamidensystems mit Elastizitätsaxen durch eine äussere Einwirkung in Bewegung gesetzt werden, und legen uns die Aufgabe vor, den Bewegungszustand der Körperatome nach Verlauf einer beliebigen Zeit zu bestimmen.

Die Voraussetzungen, welche wir dabei theils machen müssen, theils machen dürfen, sind folgende.

1. Da wir ein Dynamidensystem mit Elastizitätsaxen voraussetzen, so müssen wir nothwendig die Atome als kleine Körperchen von bestimmter, wenn auch unbekannter Gestalt betrachten, denn nur wenn die Atome axige Gestalt haben und nicht blose Punkte oder Kügelchen sind, kann im Gleichgewichtszustand eine ungleiche Elastizität

nach verschiedenen Richtungen vorhanden sein. *Cauchy* legt seinen Untersuchungen ein aus Körperpunkten bestehendes Medium zu Grunde, nimmt aber gleichwohl an, dass die Elastizität um jeden Punkt herum nach verschiedenen Richtungen verschieden sei. Dies ist ein Widerspruch, ist eine Unmöglichkeit, daher eine schwache Seite von *Cauchy's* Theorie.

2. Da die Masse der Aetheratome einer Hülle gegen die Masse des Kernes verschwindend klein ist, so kann diese Masse der Aetherhüllen als solche die Bewegung der Körperatome nicht merklich alteriren; wir dürfen also die Masse der Aetherhüllen ganz vernachlässigen.

3. Es ist nicht erlaubt, die Kräfte zu vernachlässigen, welche in den Aetheratomen ihren Sitz haben, denn diese Kräfte sind sehr energisch, obgleich die Masse der Aetheratome sehr klein ist. Wir müssen daher für die Kraft, mit welcher irgend eine Dynamide mit ihrem ganzen Kräftesystem auf die Masse eines Körperatoms einwirkt, die Funktion $m m_1 f(r)$ in Rechnung bringen, welche wir in Nr. 55 genauer bestimmt haben. Wollte man die Genauigkeit sehr weit treiben, so müsste man zu dem für $m m f(r)$ gefundenen Ausdruck noch ein Glied hinzufügen, welches von der Form der Körperatome abhinge und überdies noch mit der Richtung von r veränderlich wäre, denn wenn die Körperatome bestimmte Gestalten haben, richtet sich streng genommen die Wechselwirkung zweier Atome nicht nur nach der Entfernung r ihrer Schwerpunkte, sondern auch nach der Gestalt der Atome und nach ihrer Stellung gegen die Linie r.

Hiermit ist nun das Atomsystem, auf welchem die Körperschwingungen beruhen, charakterisirt, und, wie wir in der Folge sehen werden, von dem System, auf welchem die Lichtschwingungen beruhen, wesentlich verschieden.

Wir gehen nun zur Rechnung über.

Um die Position jedes Atoms angeben zu können, legen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem Ox Oy Oz zu Grund.

Es seien für den Gleichgewichtszustand x y z, für den zur Zeit t vorhandenen Bewegungszustand $x+\xi$ $y+\upsilon$ $z+\zeta$ die Coordinaten des Schwerpunktes eines Körperatoms m; ferner für den Gleichgewichtszustand $x+\Delta x$ $y+\Delta y$ $z+\Delta z$ und für den nach Verlauf der Zeit t vorhandenen Bewegungszustand $x+\xi+\Delta(x+\xi)$, $y+\upsilon+\Delta(y+\upsilon)$, $z+\zeta+\Delta(z+\zeta)$ die Coordinaten des Schwerpunktes eines zweiten Körperatoms m_1.

Im Gleichgewichtszustand sind die nach den Richtungen Ox Oy Oz zerlegten Kräfte, mit welchen das Atom m_1 gegen m, einwirkt:

$$-m m_1 f(r) \frac{\Delta x}{r} \qquad -m m_1 f(r) \frac{\Delta y}{r} \qquad -m m_1 f(r) \frac{\Delta z}{r}$$

Drei von den Bedingungen des Gleichgewichtes des Atoms m sind daher:

$$\left.\begin{array}{l} S\, m\, m_{,}\, f(r)\, \frac{\Delta x}{r} = o \\[2ex] S\, m\, m_{,}\, f(r)\, \frac{\Delta y}{r} = o \\[2ex] S\, m\, m_{,}\, f(r)\, \frac{\Delta z}{r} = o \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Zur Zeit t sind dagegen die Kräfte, mit welchen das Atom m nach den positiven Richtungen der Axen $O\,x$ $O\,y$ $O\,z$ von allen anderen Dynamiden des Systems zur Bewegung angeregt wird:

$$- S\, m\, m_{,}\, f(r+\varrho)\, \frac{\Delta x + \Delta \xi}{r+\varrho} \qquad - S\, m\, m_{,}\, f(r+\varrho)\, \frac{\Delta y + \Delta v}{r+\varrho}$$

$$- S\, m\, m_{,}\, f(r+\varrho)\, \frac{\Delta z + \Delta \zeta}{r+\varrho}$$

wobei $r+\varrho$ die Entfernung der Schwerpunkte der Atome m und $m_{,}$ zur Zeit t bezeichnet. Zu dieser Zeit t sind ferner diese Kräfte:

$$2\, m\, \frac{d^2 \xi}{dt^2} \qquad 2\, m\, \frac{d^2 v}{dt^2} \qquad 2\, m\, \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \qquad *)$$

---

*) Ich muss hier bemerken, dass meine Differenzialgleichungen der Bewegung einer Masse von denen anderer Schriftsteller abweichen, weil ich die Masse M eines Körpers nicht durch den Quotienten aus dem Gewicht P des Körpers und der Beschleunigung g durch die Schwere, also nicht durch $\frac{P}{g}$, sondern durch $\frac{P}{2g}$ ausdrücke. Heisst also K eine in Kilogrammen ausgedrückte Kraft, welche auf einen Körper treibend einwirkt, dessen Gewicht P und dessen Masse M ist, so setze ich:

$$M = \frac{P}{2g} \qquad \frac{d^2 x}{dt^2} = g\, \frac{K}{P} = \frac{1}{2}\, \frac{K}{M}$$

Zu dieser Abweichung habe ich mich entschlossen, um für das Prinzip der lebendigen Kräfte eine einfache und naturgemässe Ausdrucksweise zu erhalten. Bezeichnet man durch V die Geschwindigkeit, die in einem Körper, dessen Gewicht P ist, eintritt, wenn auf denselben eine constante Kraft K durch einen Weg S einwirkt, so ist nach meiner Bezeichnungsart:

$$K\, s = \frac{P}{2g}\, V^2 = P\, \frac{V^2}{2g} = M\, V^2$$

Ich nenne nun ebenfalls das Produkt $M\,V^2$ aus Masse ($M = \frac{P}{2g}$ wie ich sie messe) in das Quadrat der Geschwindigkeit: lebendige Kraft, und das Produkt $K\,s$ aus Kraft und Weg: Arbeit oder Wirkung; kann aber nun sagen, dass Arbeit und lebendige Kraft äquivalente Dinge sind.

Die Differenzialgleichungen der Bewegung des Atoms m sind demnach:

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{d^2\xi}{dt^2} + S\,m_1 f(r+\rho)\frac{\Delta x + \Delta\xi}{r+\rho} &= o \\ 2\frac{d^2 v}{dt^2} + S\,m_1 f(r+\rho)\frac{\Delta y + \Delta v}{r+\rho} &= o \\ 2\frac{d^2\zeta}{dt^2} + S\,m_1 f(r+\rho)\frac{\Delta z + \Delta\zeta}{r+\rho} &= o \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Da wir einen stabilen Gleichgewichtszustand und eine sehr schwache Erschütterung voraussetzen, so werden wir keinen merklichen Fehler begehen, wenn wir $\xi\ v\ \zeta$ und $\Delta\xi\ \Delta v\ \Delta\zeta$ als sehr kleine Grössen ansehen, und uns erlauben, in allen folgenden Rechnungen diejenigen Glieder zu vernachlässigen, welche Produkte aus Potenzen dieser Grössen enthalten. Nun ist:

$$r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

$$(r+\rho)^2 = (\Delta x + \Delta\xi)^2 + (\Delta y + \Delta v)^2 + (\Delta z + \Delta\zeta)^2$$

Entwickelt man diese Potenzen, vernachlässigt die Quadrate von $\Delta\xi\ \Delta v\ \Delta\zeta$ und berücksichtigt den Werth von r^2, so folgt:

$$\rho = \frac{1}{r}(\Delta x\,\Delta\xi + \Delta y\,\Delta v + \Delta z\,\Delta\zeta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Nach dem Taylor'schen Satz ist ferner, wenn man die Glieder, welche von den zweiten und den höheren Potenzen von ρ abhängen, vernachlässigt:

$$\frac{f(r+\rho)}{r+\rho} = \frac{f(r)}{r} + \frac{d\left(\frac{1}{r}f(r)\right)}{dr}\rho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Führt man diesen Werth von $\frac{f(r+\rho)}{r+\rho}$ in die Gleichungen (2) ein, so werden dieselben:

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{d^2\xi}{dt^2} + S\,m_1\left[\frac{f(r)}{r} + \frac{d\left(\frac{1}{r}f(r)\right)}{dr}\rho\right](\Delta x + \Delta\xi) &= o \\ 2\frac{d^2 v}{dt^2} + S\,m_1\left[\frac{f(r)}{r} + \frac{d\left(\frac{1}{r}f(r)\right)}{dr}\rho\right](\Delta y + \Delta v) &= o \\ 2\frac{d^2\zeta}{dt^2} + S\,m_1\left[\frac{f(r)}{r} + \frac{d\left(\frac{1}{r}f(r)\right)}{dr}\rho\right](\Delta z + \Delta\zeta) &= o \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (5)$$

Berücksichtigt man die Gleichgewichtsgleichungen (1) und vernachlässigt die Glieder, welche mit $\rho\,\Delta\xi$ $\rho\,\Delta\upsilon$ $\rho\,\Delta\zeta$ multiplizirt wären, so findet man:

$$\left.\begin{aligned}
&2\,\frac{d^2\xi}{dt^2} + S\,m_1\left[\frac{f(r)}{r}\,\Delta\xi + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\rho\,\Delta x\right] = 0\\
&2\,\frac{d^2\upsilon}{dt^2} + S\,m_1\left[\frac{f(r)}{r}\,\Delta\upsilon + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\rho\,\Delta y\right] = 0\\
&2\,\frac{d^2\zeta}{dt^2} + S\,m_1\left[\frac{f(r)}{r}\,\Delta\zeta + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\rho\,\Delta z\right] = 0
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(6)$$

Führt man endlich für ρ den Werth ein, welchen die Gleichung (3) darbietet, und setzt zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A}_2 &= \frac{m_1}{r}\left[f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta x^2\right]\\
\mathfrak{B}_2 &= \frac{m_1}{r}\left[f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta y^2\right]\\
\mathfrak{C}_2 &= \frac{m_1}{r}\left[f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta z^2\right]
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(7)$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{D}_2 &= \frac{m_1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta y\,\Delta z\\
\mathfrak{E}_2 &= \frac{m_1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta z\,\Delta x\\
\mathfrak{F}_2 &= \frac{m_1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta x\,\Delta y
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(8)$$

so werden die Gleichungen (6):

$$\left.\begin{aligned}
&2\,\frac{d^2\xi}{dt^2} + S\,(\mathfrak{A}_2\,\Delta\xi + \mathfrak{F}_2\,\Delta\upsilon + \mathfrak{E}_2\,\Delta\zeta) = 0\\
&2\,\frac{d^2\upsilon}{dt^2} + S\,(\mathfrak{F}_2\,\Delta\xi + \mathfrak{B}_2\,\Delta\upsilon + \mathfrak{D}_2\,\Delta\zeta) = 0\\
&2\,\frac{d^2\zeta}{dt^2} + S\,(\mathfrak{E}_2\,\Delta\xi + \mathfrak{D}_2\,\Delta\upsilon + \mathfrak{C}_2\,\Delta\zeta) = 0
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(9)$$

Dies sind also die Differenzialgleichungen der Bewegung der Körperatome. Sie sind der Form nach identisch mit denjenigen, welche *Cauchy* für ein System von Körperpunkten aufgefunden, aber auch auf Aetherschwingungen angewendet hat, was, wie wir in der Folge sehen werden, ein Missbrauch genannt werden muss.

Ich werde mich mit der Integration dieser Gleichungen aus zwei Gründen nicht befassen; 1) könnte ich, wenn ich diese Integration bewerkstelligen wollte, nichts anderes thun, als dem wohlbekannten, von *Cauchy* gelehrten Weg nachgehen; 2) werde ich in der Folge genöthigt sein, die Differenzialgleichungen, welche ich für die Bewegung des Aethers aufstelle, zu integriren, und die Gleichungen (9) sind, wie sich zeigen wird, der Form nach nur spezielle Fälle von den Aethergleichungen; die Integration dieser letzteren schliesst also auch die Integration der ersteren in sich.

Der Zweck, weshalb ich hier diese Gleichungen für die Bewegung der Körperatome aufgestellt habe, ist, wie gesagt, nur der, um den Unterschied zwischen Aether- und Körperschwingungen klar hervorheben zu können.

Ich will nun noch bemerken, dass die Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, mit dem Wachsen von r äusserst rasch abnehmen, weil sie theilweise von gegenseitigen Anziehungen der Körperatome abhängen, Anziehungen, welche wahrscheinlich viel rascher abnehmen, als die Abstossungen der Aetheratome.

Um den Gebrauch dieser Bewegungsgleichungen und der im vorigen Abschnitt aufgestellten Gleichgewichtsgleichungen zu erklären, will ich die Schwingungen eines linearen Systems (Saite oder Kette) und die Schwingungen eines ebenen Systems (Membrane) berechnen, werde mich jedoch in die Interpretation der Resultate nicht einlassen, weil es mir nur darum zu thun ist, zu zeigen, wie man und dass man zu richtigen Resultaten gelangt.

SCHWINGUNGEN EINES LINEAREN SYSTEMS ODER EINER VOLLKOMMEN BIEGSAMEN KETTE.

Denken wir uns, eine geradlinige Reihe von Dynamiden werde zuerst ähnlich wie eine Saite durch Kräfte, welche die letzten Dynamiden der Reihe anfassen, gespannt, hierauf aus ihrer gespannten Gleichgewichtslage gebracht und sich selbst überlassen, so werden gewisse Schwingungen entstehen, die wir berechnen wollen.

Lassen wir die Axe der $o\,x$ mit der Dynamidenreihe zusammenfallen, so ist für dieselbe $\varDelta y = \varDelta z = o$, daher sind die Gleichungen der Bewegung vermöge (9):

$$\left.\begin{aligned}
o &= 2\,\frac{d^2 \xi}{d t^2} + S\,\frac{m_1}{r}\left|\, f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{d\,r}\,\varDelta x^2 \right| \varDelta \xi \\
o &= 2\,\frac{d^2 v}{d t^2} + S\,\frac{m_1}{r}\,f(r)\,\varDelta v \\
o &= 2\,\frac{d^2 \zeta}{d t^2} + S\,\frac{m_1}{r}\,f(r)\,\varDelta \zeta
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Die zur Zeit t vorhandenen Verschiebungen $\xi\ \upsilon\ \zeta$ sind gewisse Funktionen von x; wir können daher vermöge des Taylor'schen Satzes annähernd schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\xi &= \frac{d\xi}{dx}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{d^2\xi}{dx^2}\Delta x^2 \\ \Delta\upsilon &= \frac{d\upsilon}{dx}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{d^2\upsilon}{dx^2}\Delta x^2 \\ \Delta\zeta &= \frac{d\zeta}{dx}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{d^2\zeta}{dx^2}\Delta x^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Führt man diese Werthe in (1) ein, so findet man:

$$o = 2\frac{d^2\xi}{dt^2} + S\frac{m_1}{r}\left[f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}f(r)\right)}{dr}\Delta x^2\right]\left(\frac{d\xi}{dx}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{d^2\xi}{dx^2}\Delta x^2\right)$$

$$o = 2\frac{d^2\upsilon}{dt^2} + S\frac{m_1}{r}f(r)\left(\frac{d\upsilon}{dx}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{d^2\upsilon}{dx^2}\Delta x^2\right)$$

$$o = 2\frac{d^2\zeta}{dt^2} + S\frac{m_1}{r}f(r)\left(\frac{d\zeta}{dx}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{d^2\zeta}{dx^2}\Delta x^2\right)$$

Berücksichtigt man, dass $S\, m_1 \frac{f(r)}{r}\Delta x = o$ ist, so werden diese Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} o &= 2\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{d^2\xi}{dx^2} S\frac{m_1}{2}\left[\frac{f(r)}{r}\Delta x^2 + \frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r}f(r)\right)}{dr}\Delta x^4\right] \\ o &= 2\frac{d^2\upsilon}{dt^2} + \frac{d^2\upsilon}{dx^2} S\frac{m_1}{2}\frac{f(r)}{r}\Delta x^2 \\ o &= 2\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{d^2\zeta}{dx^2} S\frac{m_1}{2}\frac{f(r)}{r}\Delta x^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (3)$$

Die in diesen Gleichungen vorkommenden Summen können auf folgende Weise bestimmt werden. Nennen wir $\mathfrak{T}$ die Spannung, p das Gewicht jeder Längeneinheit, l die Länge der Kette zwischen den Angriffspunkten der spannenden Kräfte, so können wir die erste der Gleichungen (17), Seite 76, auf den vorliegenden Fall anwenden, wenn wir in derselben setzen:

$$X = o \qquad \Sigma m X_2 x_1 = \mathfrak{T} l \qquad \Sigma m = \frac{lp}{2g}$$

und dann findet man:

$$\mathfrak{T}\, l - \frac{l p}{2 g} S \frac{m_1}{2} \frac{f(r)}{r} \Delta x^2 = 0$$

oder :

$$- S \frac{m_1}{2} \frac{f(r)}{r} \Delta x^2 = \frac{2 g \mathfrak{T}}{p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Nun ist vermöge der ersten der Gleichungen (41), Seite 86 :

$$- \mathfrak{T} = - S \frac{m_1}{2} \frac{1}{r_0} \frac{d\left(\frac{1}{r_0} f(r_0)\right)}{d r_0} \Delta x_0^2 = \frac{2 g \varepsilon}{p}$$

wobei ε den Modulus der Elastizität für den natürlichen ungespannten Zustand der Kette bedeutet; und weil sich dieser Modulus bei einer schwachen Ausdehnung nur äusserst wenig ändert, so darf man auch setzen :

$$- S \frac{m_1}{2} \frac{1}{r} \frac{d\left(\frac{1}{r} f(r)\right)}{d r} \Delta x^2 = \frac{2 g \varepsilon}{p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Hiermit sind die Werthe der in den Gleichungen (3) vorkommenden Summen bestimmt und man erhält folglich :

$$\left.\begin{aligned} 2 \frac{d^2 \xi}{d t^2} &= \frac{2 g}{p} (\mathfrak{T} + \varepsilon) \frac{d^2 \xi}{d x^2} \\ 2 \frac{d^2 v}{d t^2} &= \frac{2 g}{p} \mathfrak{T} \frac{d^2 v}{d x^2} \\ 2 \frac{d^2 \zeta}{d t^2} &= \frac{2 g}{p} \mathfrak{T} \frac{d^2 \zeta}{d x^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Setzen wir zur Abkürzung :

$$\left.\begin{aligned} c &= \sqrt{\frac{g(\mathfrak{T} + \varepsilon)}{p}} \\ c_1 &= \sqrt{\frac{g \mathfrak{T}}{p}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

so werden die Differenzialgleichungen der Bewegung :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{d t^2} &= c^2 \frac{d^2 \xi}{d x^2} \\ \frac{d^2 v}{d t^2} &= c_1^2 \frac{d^2 v}{d x^2} \\ \frac{d^2 \zeta}{d t^2} &= c_1^2 \frac{d^2 \zeta}{d x^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Die erste derselben bestimmt die Längenschwingungen, die letzte die Querschwingungen. Da ihre Formen übereinstimmen, so genügt es, eine derselben, z. B. die erste, zu integriren. Die Integrale der beiden andern Gleichungen ergeben sich dann, wenn man c mit c_1 vertauscht.

Um die erste der Gleichungen (8) zu integriren, versuchen wir durch die Annahme

$$\xi = XT \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

zu genügen, indem wir voraussetzen, dass X nur eine Funktion von x und T nur eine Funktion von t ist. Unter dieser Voraussetzung ist:

$$\frac{d^2 \xi}{d t^2} = X \frac{d^2 T}{d t^2} \qquad \frac{d^2 \xi}{d x^2} = T \frac{d^2 X}{d x^2}$$

Setzt man diese Werthe in die erste der Gleichungen (8), so wird dieselbe:

$$X \frac{d^2 T}{d t^2} = c^2 \, T \frac{d^2 X}{d x^2}$$

oder:

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{d t^2} = c^2 \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{d x^2}$$

Da t und x von einander nicht abhängen, so kann diese Gleichung nur richtig sein, wenn jedes der beiden Glieder gleich ist einer gewissen Constante, die wir mit $-\alpha^2$ bezeichnen wollen. Wir erhalten daher:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 X}{d x^2} + \left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 X &= 0 \\ \frac{d^2 T}{d t^2} + \alpha^2 T &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Die Integrale dieser Gleichungen sind:

$$X = \mathfrak{A} \cos. \frac{\alpha x}{c} + \mathfrak{B} \sin. \frac{\alpha x}{c}$$

$$T = \mathfrak{C} \cos. \alpha t + \mathfrak{D} \sin. \alpha t$$

Setzen wir diese Werthe in (9), so folgt:

$$\xi = \left(\mathfrak{A} \cos. \frac{\alpha x}{c} + \mathfrak{B} \sin. \frac{\alpha x}{c}\right) (\mathfrak{C} \cos. \alpha t + \mathfrak{D} \sin. \alpha t) \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

wobei $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{C}$ $\mathfrak{D}$ α constante Grössen bezeichnen. Da wir annehmen, dass die Enden des linearen Systems festgehalten werden, so muss sowohl für $x = 0$ als auch für $x = l$ der Werth von ξ verschwinden, wie gross auch t sein mag. Man hat daher:

$$o = \mathfrak{A}\,(\mathfrak{C}\cos.\alpha t + \mathfrak{D}\sin.\alpha t)$$

$$o = \left(\mathfrak{A}\cos.\frac{\alpha l}{c} + \mathfrak{B}\sin.\frac{\alpha l}{c}\right)(\mathfrak{C}\cos.\alpha t + \mathfrak{D}\sin.\alpha t)$$

Diese Gleichungen können für jeden Werth von t nur dann bestehen, wenn

$$\mathfrak{A} = o \qquad\qquad \frac{\alpha l}{c} = i\pi$$

ist, wobei i irgend eine ganze Zahl bezeichnet. Hierdurch wird nun der Ausdruck (11)

$$\xi = \left(\mathfrak{C}\cos.\frac{i\pi c}{l}t + \mathfrak{D}\sin.\frac{i\pi c}{l}t\right)\sin.\frac{i\pi x}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Dieser Werth von ξ entspricht sowohl der ersten der Gleichungen (8), als auch der Bedingung, dass die Endpunkte des linearen Systems keine Bewegung machen sollen. Wenn x um $2\frac{l}{i}$ zunimmt, ändert sich der Werth von ξ nicht; es ist mithin $2\frac{l}{i} = \lambda$ die Wellenlänge. Wenn ferner t um $2\frac{l}{ic}$ wächst, tritt abermals für ξ der gleiche Werth ein; es ist demnach $2\frac{l}{ic} = T$ die Zeit einer Schwingung.

Nun ist $\frac{\lambda}{T} = \frac{2\frac{l}{i}}{2\frac{l}{ic}} = c$. Allein dieser Quotient $\frac{\lambda}{T}$ ist nichts anderes als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, und diese wird also durch die Constante c gemessen. Die Längenschwingungen des linearen Systems werden nun durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\left.\begin{array}{ll} \xi = \left(\mathfrak{C}\cos.\frac{i\pi c}{l}t + \mathfrak{D}\sin.\frac{i\pi c}{l}t\right)\sin.\frac{i\pi x}{l} & \\ \text{Wellenlänge} \ldots\ldots\ldots & \lambda = 2\frac{l}{i} \\ \text{Schwingungszeit} \ldots\ldots & T = 2\frac{l}{i}\sqrt{\frac{p}{g(\mathfrak{X}+\varepsilon)}} \\ \text{Fortpflanzungsgeschwindigkeit} & c = \sqrt{\frac{g(\mathfrak{X}+\varepsilon)}{p}} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (13)$$

Die Gesetze der Querschwingungen ergeben sich aus (13), wenn man c mit c_1 vertauscht. Es ist daher für die Querschwingungen:

$$\left.\begin{array}{ll} \upsilon = \zeta = \left(\mathfrak{C}_1 \cos. \frac{i_1 \pi c_1}{l} t + \mathfrak{D}_1 \sin. \frac{i_1 \pi c_1}{l}\right) \sin. \frac{i_1 \pi x}{l} & \\ \text{Wellenlänge} \ldots\ldots\ldots \lambda_1 = 2 \frac{l}{i_1} & \\ \text{Schwingungszeit} \ldots\ldots T_1 = 2 \frac{l}{i_1} \sqrt{\frac{p}{g \mathfrak{X}}} & \\ \text{Fortpflanzungsgeschwindigkeit} \quad c_1 = \sqrt{\frac{g \mathfrak{X}}{p}} & \end{array}\right\} \ldots\ldots (14)$$

Da die Ausdrücke für c und c_1 weder l noch i und i_1 enthalten, so sind die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sowohl von der Länge des eingespannten Stückes, als auch von der Theilung der Saite ganz unabhängig. In den Gleichungen (13) kann man sich erlauben, $\mathfrak{X}$ gegen ε zu vernachlässigen, denn die Spannung einer Kette oder Saite ist jederzeit sehr klein gegen den Modulus der Elastizität. So lange also die Spannung ein gewisses Maass nicht überschreitet, sind die Längenschwingungen von der Spannung nicht abhängig.

Die Gleichungen (13) und (14) sind nur partikuläre Integrale der Gleichungen (8); die allgemeinen Integrale wären :

$$\xi = \Sigma \left(\mathfrak{C} \cos. \frac{i \pi c}{l} t + \mathfrak{D} \sin. \frac{i \pi c}{l} t\right) \sin. \frac{i \pi x}{l}$$

$$\upsilon = \zeta = \Sigma \left(\mathfrak{C}_1 \cos. \frac{i_1 \pi c_1}{l} t + \mathfrak{D}_1 \sin. \frac{i_1 \pi c_1}{l} t\right) \sin. \frac{i_1 \pi x}{l}$$

wobei Σ Summenzeichen sind, welche ausdrücken, dass man sowohl für i als auch für i_1 alle ganzen positiven Zahlen von 1 bis ∞ setzen, und die sich hierdurch ergebende Reihe von Gliedern summiren soll.

SCHWINGUNGEN EINES EBENEN DYNAMIDENSYSTEMS ODER EINER MEMBRANE.

Denken wir uns, ein ebenes Dynamidensystem sei ähnlich wie ein Trommelfell nach allen Richtungen gleichmässig gespannt, werde hierauf erschüttert und dann sich selbst überlassen. Die dadurch entstehenden Bewegungen ergeben sich aus den bereits aufgestellten Gleichungen.

Legen wir die Axen $o\,x$ und $o\,y$ in die Ebene des Systems und $o\,z$ senkrecht auf dieselbe, so ist $\Delta z = o$ und die Gleichungen (7), (8), (9), Seite 99, werden :

$$\left.\begin{array}{l}
\mathfrak{A}_2 = \frac{m_1}{r}\left[f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r} f(r)\right)}{dr} \varDelta x^2\right] \\
\mathfrak{B}_2 = \frac{m_1}{r}\left[f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r} f(r)\right)}{dr} \varDelta y^2\right] \\
\mathfrak{C}_2 = \frac{m_1}{r} f(r) \\
\mathfrak{D}_2 = 0 \\
\mathfrak{E}_2 = 0 \\
\mathfrak{F}_2 = \frac{m_1}{r} \frac{d\left(\frac{1}{r} f(r)\right)}{dr} \varDelta x \varDelta y
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}
2\frac{d^2 \xi}{dt^2} + S(\mathfrak{A}_2 \varDelta \xi + \mathfrak{F}_2 \varDelta \upsilon) = 0 \\
2\frac{d^2 \upsilon}{dt^2} + S(\mathfrak{F}_2 \varDelta \xi + \mathfrak{B}_2 \varDelta \upsilon) = 0 \\
2\frac{d^2 \zeta}{dt^2} + S\, \mathfrak{C}_2 \varDelta \zeta \qquad\qquad = 0
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Da die zur Zeit t stattfindenden Verschiebungen $\xi\ \upsilon\ \zeta$ Funktionen von x und y sind, so können wir vermöge des Taylor'schen Satzes annähernd schreiben:

$$\left.\begin{array}{l}
\varDelta \xi = \frac{d\xi}{dx}\varDelta x + \frac{d\xi}{dy}\varDelta y + \frac{1}{2}\frac{d^2\xi}{dx^2}\varDelta x^2 + \frac{d^2\xi}{dx\,dy}\varDelta x \varDelta y + \frac{1}{2}\frac{d^2\xi}{dy^2}\varDelta y^2 \\
\varDelta \upsilon = \frac{d\upsilon}{dx}\varDelta x + \frac{d\upsilon}{dy}\varDelta y + \frac{1}{2}\frac{d^2\upsilon}{dx^2}\varDelta x^2 + \frac{d^2\upsilon}{dx\,dy}\varDelta x \varDelta y + \frac{1}{2}\frac{d^2\upsilon}{dy^2}\varDelta y^2 \\
\varDelta \zeta = \frac{d\zeta}{dx}\varDelta x + \frac{d\zeta}{dy}\varDelta y + \frac{1}{2}\frac{d^2\zeta}{dx^2}\varDelta x^2 + \frac{d^2\zeta}{dx\,dy}\varDelta x \varDelta y + \frac{1}{2}\frac{d^2\zeta}{dy^2}\varDelta y^2
\end{array}\right\} \quad (3)$$

Führt man diese Werthe in die Gleichungen (2) ein, berücksichtigt die Ausdrücke (1), berücksichtigt ferner, dass die Differenzialquotienten vor die Summenzeichen gesetzt werden dürfen, und lässt alle Glieder weg, welche ungerade Potenzen von $\varDelta x$ und $\varDelta y$ enthalten, so findet man:

$$
\left.\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
&2\,\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{d^2\xi}{dx^2}\,S\,\frac{m_1}{2}\left[\frac{f(r)}{r}\,\Delta x^2 + \frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta x^4\right]\\
&\quad + \frac{d^2\xi}{dy^2}\,S\,\frac{m_1}{2}\left[\frac{f(r)}{r}\,\Delta y^2 + \frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta x^2\,\Delta y^2\right]\\
&\quad + 2\,\frac{d^2 \upsilon}{dx\,dy}\,S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta x^2\,\Delta y^2
\end{aligned}\right\} = 0\\[2ex]
&\left.\begin{aligned}
&2\,\frac{d^2 \upsilon}{dt^2} + \frac{d^2 \upsilon}{dy^2}\,S\,\frac{m_1}{2}\left[\frac{f(r)}{r}\,\Delta y^2 + \frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta y^4\right]\\
&\quad + \frac{d^2 \upsilon}{dx^2}\,S\,\frac{m_1}{2}\left[\frac{f(r)}{r}\,\Delta x^2 + \frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta x^2\,\Delta y^2\right]\\
&\quad + 2\,\frac{d^2\xi}{dx\,dy}\,S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta x^2\,\Delta y^2
\end{aligned}\right\} = 0\\[2ex]
&2\,\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{d^2\zeta}{dx^2}\,S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{f(r)}{r}\,\Delta x^2 + \frac{d^2\zeta}{dy^2}\,S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{f(r)}{r}\,\Delta y^2 = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (4)
$$

Dies sind die Differenzialgleichungen der Bewegung des ebenen Dynamidensystems. Es sind nur Annäherungen, weil in den Ausdrücken (3) nur bis an die dritten Dimensionen von Δx und Δy geschritten wurde.

Die letzte dieser Gleichungen, welche unabhängig von den beiden andern integrirt werden kann, bestimmt die Transversalschwingungen, und mit der Integration dieser Gleichungen wollen wir uns nun beschäftigen.

Wenn wir annehmen, dass die Membrane nach allen Richtungen gleich elastisch und gleich gespannt ist, haben die Summen

$$S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{f(r)}{r}\,\Delta x^2 \qquad\qquad S\,\frac{m_1}{r}\,\frac{f(r)}{r}\,\Delta y^2$$

gleiche Werthe, und der Betrag derselben kann vermittelst der Ausdrücke (17), Seite 76, bestimmt werden.

Nehmen wir an, die Begrenzung der Membrane bilde ein Rechteck, dessen Dimensionen l und l_1 sind. Legen wir den Anfangspunkt der Coordinaten in einen Eckpunkt des Rechteckes, die Axe Ox in die Richtung von l, die Axe Oy in die Richtung von l_1 und bezeichnen durch 𝔖 die Kraft, welche auf jede Längeneinheit des Umfangs spannend wirkt, endlich durch p das Gewicht einer Flächeneinheit der Membrane, so ist in die Gleichungen (17), Seite 76, zu setzen :

$$\Sigma m (X x - X_2 x_2) = \Sigma m (Y y - Y_2 y_2) = \mathfrak{S}\, l_1$$

$$\Sigma m = \frac{l_1 p}{2 g}$$

und man findet :

$$\Sigma \frac{m_1}{2} \frac{f(r)}{r} \Delta x^2 = \Sigma \frac{m_1}{2} \frac{f(r)}{r} \Delta y^2 = -2 g \frac{\mathfrak{S}}{p}$$

Hierdurch wird die letzte der Gleichungen (4) :

$$\frac{d^2 \zeta}{d t^2} = \frac{g \mathfrak{S}}{p} \left(\frac{d^2 \zeta}{d x^2} + \frac{d^2 \zeta}{d y^2} \right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

oder wenn wir zur Abkürzung setzen :

$$c = \sqrt{\frac{g \mathfrak{S}}{p}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

$$\frac{d^2 \zeta}{d t^2} = c^2 \left(\frac{d^2 \zeta}{d x^2} + \frac{d^2 \zeta}{d y^2} \right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Es ist leicht einzusehen, dass diese Gleichung nicht nur für eine rechteckige, sondern auch für jede beliebige Begrenzung der Membrane gilt.

Um diese Gleichung zu integriren, versuchen wir zu setzen :

$$\zeta = T X Y \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

wobei T nur t, X nur x, Y nur y enthalten soll. Unter dieser Voraussetzung ist :

$$\frac{d^2 \zeta}{d t^2} = X Y \frac{d^2 T}{d t^2} \qquad \frac{d^2 \zeta}{d x^2} = T Y \frac{d^2 X}{d x^2} \qquad \frac{d^2 \zeta}{d y^2} = T X \frac{d^2 Y}{d y^2}$$

Führt man diese Werthe in (7) ein, so findet man :

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{d t^2} = c^2 \left(\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{d x^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{d y^2} \right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Da x, y und t von einander ganz unabhängig sind, so kann diese Gleichung nur bestehen, wenn jedes ihrer Glieder einen constanten Werth hat. Diese Gleichung wird also entsprechen, wenn wir nehmen :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{d t^2} &= -\alpha^2 \\ c^2 \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{d x^2} &= -\beta^2 \\ c^2 \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{d y^2} &= -\gamma^2 \end{aligned} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

wobei $\alpha\ \beta\ \gamma$ Constante sind, zwischen denen jedoch die Beziehung besteht:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Die Integrale der Gleichungen (10) sind:

$$\left.\begin{aligned} T &= \mathfrak{A} \sin.\ \alpha t + \mathfrak{B} \cos.\ \alpha t \\ X &= \mathfrak{G} \sin.\ \frac{\beta}{c} x + \mathfrak{D} \cos.\ \frac{\beta}{c} x \\ Y &= \mathfrak{D} \sin.\ \frac{\beta_1}{c} y + \mathfrak{F} \cos.\ \frac{\beta_1}{c} y \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Setzt man diese Werthe in (8), so findet man:

$$\zeta = (\mathfrak{A} \sin.\ \alpha t + \mathfrak{B} \cos.\ \alpha t)\left(\mathfrak{G} \sin.\ \frac{\beta}{c} x + \mathfrak{D} \cos.\ \frac{\beta}{c} x\right)\left(\mathfrak{G} \sin.\ \frac{\beta_1}{c} y + \mathfrak{F} \cos.\ \frac{\beta_1}{c} y\right) \quad (13)$$

Dieser Werth von ζ ist jedoch nicht das allgemeine Integrale der Gleichung (7), sondern nur ein partikuläres.

Wenden wir den Ausdruck (13) auf den Fall an, wenn die Membrane über einen rechteckigen Rahmen gespannt ist, dann muss sein:

1. für $x = 0$ $\zeta = 0$ für jeden Werth von t und y; folglich ist zu setzen $\mathfrak{D} = 0$;
2. für $y = 0$ $\zeta = 0$ für jeden Werth von t und x; folglich ist zu nehmen $\mathfrak{F} = 0$;
3. für $x = l$ $\zeta = 0$ für jeden Werth von t und y; folglich ist zu setzen $\sin.\ \frac{\beta}{c} l = 0$ oder $\frac{\beta}{c} l = i\pi$, wobei i irgend eine ganze Zahl bezeichnet;
4. für $y = l_1$ $\zeta = 0$ für jeden Werth von t und x; demnach hat man $\sin.\ \frac{\beta_1}{c} l_1 = 0$ oder $\frac{\beta_1}{c} l_1 = i_1 \pi$, wobei i_1 abermals irgend eine ganze Zahl ist.

Vermöge dieser Bestimmungen findet man nun mit Berücksichtigung der Beziehung (11):

$$\zeta = \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{A} \sin.\left[\pi c \sqrt{\left(\frac{i}{l}\right)^2 + \left(\frac{i_1}{l_1}\right)^2}\, t\right] \\ &+ \mathfrak{B} \cos.\left[\pi c \sqrt{\left(\frac{i}{l}\right)^2 + \left(\frac{i_1}{l_1}\right)^2}\, t\right] \end{aligned}\right\} \sin.\ \frac{i \pi x}{l} \sin.\ \frac{i_1 \pi y}{l_1} \quad \ldots \quad (14)$$

Dieser Ausdruck bestimmt nur einen speziellen Schwingungszustand einer über einen rechteckigen Rahmen gespannten Membrane.

Für den allgemeinsten Schwingungszustand hätte man:

$$\zeta = \Sigma\,\Sigma \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} \sin. \left[\pi c \sqrt{\left(\frac{i}{l}\right)^2 + \left(\frac{i_1}{l_1}\right)^2}\, t \right] \\ + \mathfrak{B} \cos. \left[\pi c \sqrt{\left(\frac{i}{l}\right)^2 + \left(\frac{i_1}{l_1}\right)^2}\, t \right] \end{array} \right\} \sin. \frac{i \pi x}{l} \sin \frac{i_1 \pi y}{l_1} \quad . \quad . \quad (15)$$

wobei sich die Summen $\Sigma\,\Sigma$ auf alle möglichen ganzen positiven Werthe von i und i_1 beziehen.

In die Interpretation der Gleichung (14) will ich mich nicht einlassen; man kann hierüber in *Lamé*, „Théorie de l'élasticité," pag. 116, nachsehen.

B. Aetherschwingungen.

AUFSTELLUNG DER BEWEGUNGSGLEICHUNGEN.

Wir betrachten nun abermals ein aus Dynamiden bestehendes System, dessen Atome oder Kerne Körperchen von bestimmter Gestalt sind, welches demnach im Gleichgewichtszustand nach Axenrichtungen symmetrisch gruppirt ist, daher um jeden Punkt herum nach verschiedenen Richtungen verschiedene Elastizitäten besitzt; nehmen aber nun an, dass nur allein in den Aetherhüllen Bewegungen angeregt werden, und erlauben uns, die ungemein schwache Bewegung, die in den Kernen eintreten könnte, ganz zu vernachlässigen. Unter dieser Voraussetzung wird der Bewegungszustand jeder Aetherhülle darin bestehen, dass sich dieselbe als Ganzes gegen den Kern bewegt, ohne denselben zu verlassen, und dass die Aetheratome der Aetherhülle gegen einander relative Bewegungen machen. Wir betrachten jedoch nicht die relative Bewegung der Aetheratome einer Hülle gegen einander, sondern nur die Bewegung der Aetherhülle als Ganzes, und zwar dadurch, dass wir die Bewegung des Massenmittelpunktes jeder Aetherhülle bestimmen. Dabei wird es uns allerdings auch nicht gelingen, mit absoluter Strenge zu verfahren, allein wir können doch klar aussprechen, was wir eigentlich machen und was wir vernachlässigen, und werden erkennen, dass dadurch kein erheblicher Fehler entstehen kann.

Es seien in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem (Fig. 10), $x\ y\ z$ die Coordinaten des Schwerpunktes eines Körperatoms a, m seine Masse, $\xi\ \upsilon\ \zeta$ die relativen Coordinaten des Schwerpunktes α der zum Atom m gehörigen Hülle zur Zeit t; $x+\Delta x$ $y+\Delta y$ $z+\Delta z$ die Coordinaten des Schwerpunktes eines andern Körperatomes a_1, seine Masse m_1, $\xi+\Delta\xi$ $\upsilon+\Delta\upsilon$ $\zeta+\Delta\zeta$ die relativen Coordinaten des Schwerpunktes α_1 der Hülle von m_1 gegen den Schwerpunkt des Kernes m_1, $\mu\ \mu_1$ *) die Massen der beiden Aetherhüllen.

Da wir annehmen, dass sich die Körperatome nicht bewegen, so sind die Coordinaten $x\ y\ z$ $x+\Delta x$ $y+\Delta y$ $z+\Delta z$ unabhängig von der Zeit t.

Wir setzen ferner $\overline{a\alpha} = \rho$ die Entfernung des Schwerpunktes der Aetherhülle von dem Schwerpunkte des Atoms; $\overline{a a_1} = r$ die mit der Zeit nicht veränderliche Entfernung

*) Im zweiten Abschnitt wurden durch μ und μ_1 die Massen der einzelnen Aetheratome bezeichnet.

der Schwerpunkte der Kerne; $\overline{a_1 \alpha} = r + \sigma$ die Entfernung des Schwerpunktes des zweiten Kernes a_1 vom Schwerpunkt der Hülle des ersten Kernes; $\overline{\alpha \alpha_1} = r + \sigma_1$ die Entfernung der Schwerpunkte der Hüllen; alles zur Zeit t gültig.

Wir denken uns die Aethermassen der Hüllen in ihren Mittelpunkten concentrirt und nehmen an, dass auf die in α concentrirte Aethermasse μ zur Zeit t folgende Kräfte einwirken:

1. die Anziehung des Körperatoms a gegen α;
2. die Totalität der Anziehungen aller Körperatome gegen die in α concentrirt gedachte Aethermasse μ;
3. die Totalität der Abstossungen aller in ihren Mittelpunkten concentrirt gedachten Aethermassen gegen die in α concentrirt gedachte Aethermasse μ.

Wir bezeichnen:

1. die Anziehung von a gegen α mit $m \mu H(\rho)$;
2. die Anziehung von a_1 gegen α mit $m_1 \mu G(r + \sigma)$;
3. die Abstossung von α_1 gegen α mit $\mu \mu_1 J(r + \sigma_1)$;

wobei $G(\,)$ $J(\,)$ Funktionen ausdrücken, die mit den Entfernungen der Punkte rasch abnehmen; $H(\,)$ hingegen eine Funktion ist, die im Gegentheil mit dem Wachsen der Entfernung rasch zunimmt, denn die Kraft, mit welcher der Kern a auf seine Aetherhülle einwirkt, muss nothwendig für einen stabilen Gleichgewichtszustand mit der Entfernung $\overline{a \alpha}$ wachsen.

Dies vorausgesetzt gehen wir nun zur Rechnung über.

Die Cosinuse der Winkel, welche die Richtungen der Linien $\overline{a \alpha}$ $\overline{\alpha a_1}$ $\overline{\alpha \alpha_1}$ mit den positiven Richtungen der Coordinatenaxen bilden, sind:

	x	y	z
für $\overline{a \alpha}$ . . .	$\frac{\xi}{\rho}$	$\frac{v}{\rho}$	$\frac{\zeta}{\rho}$
„ $\overline{\alpha a_1}$ . . .	$\frac{\Delta x - \xi}{r + \sigma}$	$\frac{\Delta y - v}{r + \sigma}$	$\frac{\Delta z - \zeta}{r + \sigma}$
„ $\overline{\alpha \alpha_1}$ . . .	$\frac{\Delta x + \Delta \xi}{r + \sigma_1}$	$\frac{\Delta y + \Delta v}{r + \sigma_1}$	$\frac{\Delta z + \Delta \zeta}{r + \sigma_1}$

Nennt man nun X Y Z die Summe der Kräfte, welche auf die Masse μ nach den positiven Richtungen der Axen wirken, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} X &= -m \mu H(\rho) \frac{\xi}{\rho} + S m_1 \mu G(r+\sigma) \frac{\Delta x - \xi}{r+\sigma} - S \mu \mu_1 J(r+\sigma_1) \frac{\Delta x + \Delta \xi}{r+\sigma_1} \\ Y &= -m \mu H(\rho) \frac{v}{\rho} + S m_1 \mu G(r+\sigma) \frac{\Delta y - v}{r+\sigma} - S \mu \mu_1 J(r+\sigma_1) \frac{\Delta y + \Delta v}{r+\sigma_1} \\ Z &= -m \mu H(\rho) \frac{\zeta}{\rho} + S m_1 \mu G(r+\sigma) \frac{\Delta z - \zeta}{r+\sigma} - S \mu \mu_1 J(r+\sigma_1) \frac{\Delta z + \Delta \zeta}{r+\sigma_1} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Es ist zu bemerken, dass die Funktionen $H(\rho)$ $G(r + \sigma)$ $J(r + \sigma_1)$ esentiell positiv sind.

Diese Gleichungen können weiter umgebildet werden. Es ist zunächst:

$$(r+\sigma)^2 = \left[x + \varDelta x - (x + \xi)\right]^2 + \left[y + \varDelta y - (y + \upsilon)\right]^2 + \left[z + \varDelta z - (z + \zeta)\right]^2$$

oder:

$$(r+\sigma)^2 = (\varDelta x - \xi)^2 + (\varDelta y - \upsilon)^2 + (\varDelta z - \zeta)^2$$

Vernachlässigt man die Glieder, welche zweite Potenzen von $\xi\ \upsilon\ \zeta$ enthalten, betrachtet man also nur allein unendlich kleine Schwingungen, und berücksichtigt, dass $r^2 = \varDelta x^2 + \varDelta y^2 + \varDelta z^2$ ist, so folgt aus dieser letzten Gleichung:

$$\sigma = -\frac{1}{r}(\xi \varDelta x + \upsilon \varDelta y + \zeta \varDelta z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Nun ist ferner:

$$(r+\sigma_1)^2 = \left[x + \varDelta x + \xi + \varDelta \xi - (x + \xi)\right]^2 + \left[y + \varDelta y + \upsilon + \varDelta \upsilon - (y + \upsilon)\right]^2$$
$$+ \left[z + \varDelta z + \zeta + \varDelta \zeta - (z + \zeta)\right]^2$$

oder:

$$(r+\sigma_1)^2 = (\varDelta x + \varDelta \xi)^2 + (\varDelta y + \varDelta \upsilon)^2 + (\varDelta z + \varDelta \zeta)^2$$

Entwickelt man und vernachlässigt dabei die Glieder, welche zweite Potenzen von $\varDelta \xi\ \ \varDelta \upsilon\ \ \varDelta \zeta$ enthalten, berücksichtigt ferner auch hier, dass $r^2 = \varDelta x^2 + \varDelta y^2 + \varDelta z^2$ ist, so findet man:

$$\sigma_1 = +\frac{1}{r}(\varDelta x\, \varDelta \xi + \varDelta y\, \varDelta \upsilon + \varDelta z\, \varDelta \zeta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Nach dem Taylor'schen Satz findet man annähernd:

$$\left.\begin{aligned} \frac{G(r+\sigma)}{r+\sigma} &= \frac{G(r)}{r} + \frac{d\left(\frac{1}{r} G(r)\right)}{dr}\sigma \\ \frac{J(r+\sigma_1)}{r+\sigma_1} &= \frac{J(r)}{r} + \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{dr}\sigma_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

vorausgesetzt, dass man bei dieser Entwicklung sämmtliche Glieder vernachlässigt, welche zweite und höhere Potenzen von σ und σ_1 enthalten.

Mit Berücksichtigung der Resultate 2, 3, 4 findet man nun:

$$S\, m_1\, \mu\, G(r+\sigma)\frac{\varDelta x - \xi}{r+\sigma} = \mu\, S\, m_1 \left[\frac{G(r)}{r} - \frac{d\left(\frac{1}{r} G(r)\right)}{dr}\,\frac{1}{r}(\xi \varDelta x + \upsilon \varDelta y + \zeta \varDelta z)\right](\varDelta x - \xi)$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} S m_1 \mu G(r-\sigma)\frac{\Delta x-\xi}{r+\sigma} = \mu S m_1 G(r)\frac{\Delta x}{r} - \mu\xi S m_1 \frac{G(r)}{r} - \mu\xi S m_1 \frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r}G(r)\right)}{dr}\Delta x^2 \\ - \mu\varepsilon S m_1 \frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r}G(r)\right)}{dr}\Delta x\,\Delta y \\ \mu\zeta S m_1 \frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r}G(r)\right)}{dr^2}\Delta x\,\Delta z \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

wobei abermals die Glieder, welche $\xi^2\ \varepsilon^2\ \zeta^2$ enthalten, vernachlässigt sind.

Auf ähnliche Weise findet man:

$$\left.\begin{aligned} S\mu\mu_1\frac{J(r-\sigma_1)}{r-\sigma_1}(\Delta x+\Delta\xi) = \mu S\mu_1\frac{J(r)}{r}\Delta x + \mu\Delta\xi S\mu_1\left[\frac{J(r)}{r} - \frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r}J(r)\right)}{dr}\Delta x^2\right] \\ - \mu\Delta\varepsilon S\mu_1\left[\frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r}J(r)\right)}{dr}\Delta x\,\Delta y\right] \\ + \mu\Delta\zeta S\mu_1\left[\frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r}J(r)\right)}{dr}\Delta x\,\Delta z\right] \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Für den Gleichgewichtszustand ist $\rho = \rho_1 = o$ und wollen wir ferner annehmen, dass $H(o) = o$ sei. Berücksichtigt man diese Bedingungen und die Resultate (5) und (6), so findet man vermittelst der ersten der Gleichungen (1):

$$\left.\begin{aligned} X = - m\mu H(\rho)\frac{\xi}{\rho} - \mu\xi\left[S m_1 \frac{G(r)}{r} - S m_1 \frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r}G(r)\right)}{dr}\Delta x^2\right] \\ - \mu\varepsilon\left[S m_1 \frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r}G(r)\right)}{dr}\Delta x\,\Delta y\right] \\ - \mu\zeta\left[S m_1 \frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r}G(r)\right)}{dr}\Delta x\,\Delta z\right] \\ - \mu\Delta\xi\left[S\mu_1\left(\frac{J(r)}{r} - \frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r}J(r)\right)}{dr}\Delta x^2\right)\right] \\ - \mu\Delta\varepsilon\left[S\mu_1 \frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r}J(r)\right)}{dr}\Delta x\,\Delta y\right] \\ - \mu\Delta\zeta\left[S\mu_1 \frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r}J(r)\right)}{dr}\Delta x\,\Delta z\right] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (7)$$

Vertauscht man in diesem Ausdruck x und Δx mit y, und Δy mit z und Δz, so ergeben sich die Werthe von Y und Z. Man findet:

$$Y = -m\mu H(\varrho)\frac{v}{\varrho} - \mu\xi\left[S m_1 \frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r}G(r)\right)}{dr}\Delta x\,\Delta y\right]$$

$$-\mu v\left[S m_1 \frac{G(r)}{r} + S m_1 \frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r}G(r)\right)}{dr}\Delta y^2\right]$$

$$-\mu\zeta\left[S m_1 \frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r}G(r)\right)}{dr}\Delta y\,\Delta z\right]$$

$$-\mu\,\Delta\xi\left[S \mu_1 \frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r}J(r)\right)}{dr}\Delta x\,\Delta y\right]$$

$$-\mu\,\Delta v\left[S \mu_1 \left(\frac{J(r)}{r} + \frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r}J(r)\right)}{dr}\Delta y^2\right)\right]$$

$$-\mu\,\Delta\zeta\left[S \mu_1 \frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r}J(r)\right)}{dr}\Delta y\,\Delta z\right]$$

$$Z = -m\mu H(\varrho)\frac{\zeta}{\varrho} - \mu\xi\left[S m_1 \frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r}G(r)\right)}{dr}\Delta x\,\Delta z\right]$$

$$-\mu v\left[S m_1 \frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r}G(r)\right)}{dr}\Delta y\,\Delta z\right]$$

$$-\mu\zeta\left[S m_1 \frac{G(r)}{r} + S m_1 \frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r}G(r)\right)}{dr}\Delta z^2\right]$$

$$-\mu\,\Delta\xi\left[S \mu_1 \frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r}J(r)\right)}{dr}\Delta x\,\Delta z\right]$$

$$-\mu\,\Delta v\left[S \mu_1 \frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r}J(r)\right)}{dr}\Delta z\,\Delta y\right]$$

$$-\mu\,\Delta\zeta\left[S \mu_1 \left(\frac{J(r)}{r} + \frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r}J(r)\right)}{dr}\Delta z^2\right)\right]$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned}
S\, m_1 \left[\frac{G(r)}{r} + \frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,G(r)\right)}{d\,r}\,\Delta x^2\right] &= \mathfrak{A} \\
S\, m_1 \left[\frac{G(r)}{r} + \frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,G(r)\right)}{d\,r}\,\Delta y^2\right] &= \mathfrak{B} \\
S\, m_1 \left[\frac{G(r)}{r} + \frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,G(r)\right)}{d\,r}\,\Delta z^2\right] &= \mathfrak{C} \\
S\, m_1\, \frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,G(r)\right)}{d\,r}\,\Delta x\,\Delta y &= \mathfrak{F} \\
S\, m_1\, \frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,G(r)\right)}{d\,r}\,\Delta x\,\Delta z &= \mathfrak{E} \\
S\, m_1\, \frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,G(r)\right)}{d\,r}\,\Delta y\,\Delta z &= \mathfrak{D}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,J(r)\right)}{d\,r}\,\Delta x^2\right] &= \mathfrak{A}_1 \\
\frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,J(r)\right)}{d\,r}\,\Delta y^2\right] &= \mathfrak{B}_1 \\
\frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,J(r)\right)}{d\,r}\,\Delta z^2\right] &= \mathfrak{C}_1 \\
\frac{\mu_1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,J(r)\right)}{d\,r}\,\Delta x\,\Delta y &= \mathfrak{F}_1 \\
\frac{\mu_1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,J(r)\right)}{d\,r}\,\Delta x\,\Delta z &= \mathfrak{E}_1 \\
\frac{\mu_1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,J(r)\right)}{d\,r}\,\Delta y\,\Delta z &= \mathfrak{D}_1
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

und berücksichtigen, dass für den bewegten Zustand

$$X = 2\,\mu\,\frac{d^2\,\xi}{d\,t^2}$$

$$Y = 2\,\mu\,\frac{d^2\,\upsilon}{d\,t^2}$$

$$Z = 2\,\mu\,\frac{d^2\,\zeta}{d\,t^2}$$

ist, so finden wir zur Bestimmung der Bewegung des Schwerpunktes der dem Punkte $x\ y\ z$ entsprechenden Aethersphäre folgende Differenzialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&2\,\frac{d^2\xi}{dt^2} + m\,\frac{H(\varrho)}{\varrho}\,\xi + (\mathfrak{A}\,\xi + \mathfrak{F}\,\upsilon + \mathfrak{E}\,\zeta) + S\,(\mathfrak{A}_1\,J\xi + \mathfrak{F}_1\,J\upsilon + \mathfrak{E}_1\,J\zeta) = 0\\
&2\,\frac{d^2\upsilon}{dt^2} + m\,\frac{H(\varrho)}{\varrho}\,\upsilon - (\mathfrak{F}\,\xi + \mathfrak{B}\,\upsilon + \mathfrak{D}\,\zeta) + S\,(\mathfrak{F}_1\,J\xi + \mathfrak{B}_1\,J\upsilon + \mathfrak{D}_1\,J\zeta) = 0\\
&2\,\frac{d^2\zeta}{dt^2} + m\,\frac{H(\varrho)}{\varrho}\,\zeta + (\mathfrak{E}\,\xi + \mathfrak{D}\,\upsilon + \mathfrak{C}\,\zeta) + S\,(\mathfrak{E}_1\,J\xi + \mathfrak{D}_1\,J\upsilon + \mathfrak{C}_1\,J\zeta) = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

In diesen Gleichungen (10) drücken die mit $\xi\ \upsilon\ \zeta$ multiplizirten Glieder die Wechselwirkung des Körpermediums auf das Aethermedium, die mit $J\xi\quad J\upsilon\quad J\zeta$ multiplizirten Glieder dagegen die Wirkung des Aethers auf sich selbst aus; denn $H(\varrho)$, so wie auch die Grössen $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{E}\,\mathfrak{F}$ hängen vom Körpermedium, die Grössen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{F}_1$ dagegen vom Aethermedium ab. Vernachlässigt man den Einfluss des Körpermediums auf das Aethermedium, lässt also die mit $\xi\ \upsilon\ \zeta$ multiplizirten Glieder verschwinden, so reduziren sich die Gleichungen (10) auf folgende:

$$\left.\begin{aligned}
&2\,\frac{d^2\xi}{dt^2} + S\,(\mathfrak{A}_1\,J\xi + \mathfrak{F}_1\,J\upsilon + \mathfrak{E}_1\,J\zeta) = 0\\
&2\,\frac{d^2\upsilon}{dt^2} + S\,(\mathfrak{F}_1\,J\xi + \mathfrak{B}_1\,J\upsilon + \mathfrak{D}_1\,J\zeta) = 0\\
&2\,\frac{d^2\zeta}{dt^2} + S\,(\mathfrak{E}_1\,J\xi + \mathfrak{D}_1\,J\upsilon + \mathfrak{C}_1\,J\zeta) = 0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

und diese Gleichungen stimmen in der That mit denjenigen überein, welche *Cauchy* für ein einfaches Medium zuerst aufgestellt hat.

Lässt man aber in den Gleichungen (10) die mit $\xi\ \upsilon\ \zeta$ multiplizirten Glieder weg, setzt also:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = \mathfrak{D} = \mathfrak{E} = \mathfrak{F} = 0 \qquad \text{und} \qquad H(\varrho) = 0$$

so stimmt diese Gleichung der Form nach vollkommen mit den Gleichungen (9), Seite 99, überein, welche wir für die Schwingungen der Körperatome aufgestellt haben.

Wir werden daher die Bewegungsgesetze der Körperschwingungen erhalten, wenn wir in den Integralen der Gleichungen (10) der Aetherschwingungen

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = \mathfrak{D} = \mathfrak{E} = \mathfrak{F} = 0 \qquad \text{nnd} \qquad H(\varrho) = 0$$

ferner statt $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{F}_1$ beziehungsweise $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{F}_2$ setzen, oder wenn wir (wie eine Vergleichung der Ausdrücke (7) und (8), Seite 99, mit den Ausdrücken (9), Seite 116 zeigt) das Zeichen J mit F vertauschen.

INTEGRATION DER GLEICHUNGEN (10).

Um die Gleichungen (10) zu integriren, ist es unerlässlich, über die Form der Funktion $H(\rho)$, d. h. über das Gesetz der Anziehung eines Körperatoms auf seine eigene Aethersphäre eine naturgemässe Hypothese zu machen.

Die einfachste und naturgemäss scheinende Annahme ist, dass wir setzen:

$$H(\rho) = k\,\rho \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

wobei k eine Constante bezeichnet. Unter dieser Voraussetzung wird $m\,\frac{H(\rho)}{\rho} = k\,m$ oder wenn man

$$k\,m = \epsilon \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

setzt, so werden die Gleichungen (10):

$$\left.\begin{aligned}
2\,\frac{d^2\xi}{dt^2} + (\mathfrak{A} + \epsilon)\,\xi - \mathfrak{F}\,v - \mathfrak{G}\,\zeta - S(\mathfrak{A}_1\,\Delta\xi - \mathfrak{F}_1\,\Delta v - \mathfrak{G}_1\,\Delta\zeta) &= 0 \\
2\,\frac{d^2 v}{dt^2} - \mathfrak{F}\,\xi - (\mathfrak{B} + \epsilon)\,v + \mathfrak{D}\,\zeta + S(\mathfrak{F}_1\,\Delta\xi + \mathfrak{B}_1\,\Delta v + \mathfrak{D}_1\,\Delta\zeta) &= 0 \\
2\,\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \mathfrak{G}\,\xi + \mathfrak{D}\,v - (\mathfrak{C} + \epsilon)\,\zeta + S(\mathfrak{G}_1\,\Delta\xi + \mathfrak{D}_1\,\Delta v - \mathfrak{C}_1\,\Delta\zeta) &= 0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (14)$$

Vermöge der Fourier'schen Formel kann man setzen:

$$\left.\begin{aligned}
\xi = \varphi(x\,y\,z\,t) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \cos.\, n\,\varphi(\lambda\,\mu\,\nu\,t)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\lambda\,d\mu\,d\nu \\
v = \psi(x\,y\,z\,t) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \cos.\, n\,\psi(\lambda\,\mu\,\nu\,t)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\lambda\,d\mu\,d\nu \\
\zeta = \omega(x\,y\,z\,t) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \cos.\, n\,\omega(\lambda\,\mu\,\nu\,t)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\lambda\,d\mu\,d\nu
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (15)$$

wobei

$$n = \alpha(x - \lambda) + \beta(y - \mu) + \gamma(z - \zeta) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

und $\varphi\ \psi\ \omega$ Funktionszeichen sind. Die Integrale sind sämmtlich von $-\infty$ bis $+\infty$ zu nehmen.

Aus den Gleichungen (15) folgt zunächst:

$$
\left.\begin{aligned}
\Delta\xi &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \Delta \cos. u\, \varphi(\lambda\mu\nu t)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu \\
\Delta\upsilon &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \Delta \cos. u\, \psi(\lambda\mu\nu t)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu \\
\Delta\zeta &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \Delta \cos. u\, \omega(\lambda\mu\nu t)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (17)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \cos. u\, \frac{d^2\varphi(\lambda\mu\nu t)}{dt^2}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu \\
\frac{d^2\upsilon}{dt^2} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \cos. u\, \frac{d^2\psi(\lambda\mu\nu t)}{dt^2}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu \\
\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \cos. u\, \frac{d^2\omega(\lambda\mu\nu t)}{dt^2}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (18)
$$

Führt man die Werthe von $\xi\ \upsilon\ \zeta\ \ \Delta\xi\ \ \Delta\upsilon\ \ \Delta\zeta\ \ \frac{d^2\xi}{dt^2}\ \frac{d^2\upsilon}{dt^2}\ \frac{d^2\zeta}{dt^2}$, welche die Ausdrücke (15), (17) und (18) darbieten, in (14) ein, so findet man, wenn zur Abkürzung

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi(\lambda\mu\nu t) &= \varphi \\
\psi(\lambda\mu\nu t) &= \psi \\
\omega(\lambda\mu\nu t) &= \omega
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)
$$

gesetzt wird:

$$
\left.\begin{aligned}
o &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \left\{\begin{aligned} &2\cos. u\, \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \varphi\, S\, \mathfrak{A}_1\, \Delta\cos. u + \psi\, S\, \mathfrak{F}_1\, \Delta\cos. u + \omega\, S\, \mathfrak{E}_1\, \Delta\cos. u \\ &\quad + \varphi(\mathfrak{A}+\varepsilon)\cos. u + \psi\, \mathfrak{F}\cos. u + \omega\, \mathfrak{E}\cos. u \end{aligned}\right\} d\alpha \ldots d\nu \\
o &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \left\{\begin{aligned} &2\cos. u\, \frac{d^2\psi}{dt^2} + \varphi\, S\, \mathfrak{F}_1\, \Delta\cos. u + \psi\, S\, \mathfrak{B}_1\, \Delta\cos. u + \omega\, S\, \mathfrak{D}_1\, \Delta\cos. u \\ &\quad + \varphi\, \mathfrak{F}\cos. u + \psi(\mathfrak{B}+\varepsilon)\cos. u + \omega\, \mathfrak{D}\cos. u \end{aligned}\right\} d\alpha \ldots d\nu \\
o &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \left\{\begin{aligned} &2\cos. u\, \frac{d^2\omega}{dt^2} + \varphi\, S\, \mathfrak{E}_1\, \Delta\cos. u + \psi\, S\, \mathfrak{D}_1\, \Delta\cos. u + \omega\, S\, \mathfrak{C}_1\, \Delta\cos. u \\ &\quad + \varphi\, \mathfrak{E}\cos. u + \psi\, \mathfrak{D}\cos. u + \omega(\mathfrak{C}+\varepsilon)\cos. u \end{aligned}\right\} d\alpha \ldots d\nu
\end{aligned}\right\} \quad (20)
$$

Nun ist:

$$
\begin{aligned}
\Delta\cos. u &= \cos.(u+\Delta u) - \cos. u = \cos. u\, \cos. \Delta u - \sin. u\, \sin. \Delta u - \cos. u \\
&= \cos. u\, (\cos. \Delta u - 1) - \sin. u\, \sin. \Delta u \\
&= -2\cos. u \left(\sin. \frac{1}{2}\, \Delta u\right)^2 - \sin. u\, \sin. \Delta u
\end{aligned}
$$

Bezeichnet man durch $\mathfrak{H}$ irgend eine der sechs Grössen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{F}_1$, so hat man:

$$S\,\mathfrak{H}\,\Delta\cos.u = S\,\mathfrak{H}\left[-2\cos.u\left(\sin.\frac{1}{2}\Delta u\right)^2 - \sin.u\sin.\Delta u\right]$$

$$= -2\cos.u\,S\,\mathfrak{H}\left(\sin.\frac{1}{2}\Delta u\right)^2 - \sin.u\,S\,\mathfrak{H}\sin\Delta u$$

Wenn wir annehmen, dass im Medium jedem Punkt ein Gegenpunkt entspricht, d. h. voraussetzen, dass für jeden Punkt, für welchen $\Delta x\ \Delta y\ \Delta z$ gilt, ein zweiter Punkt existirt, für welchen $-\Delta x\ -\Delta y\ -\Delta z$ gilt, so verschwinden alle diejenigen Summen, in welchen irgend eine der Grössen $\Delta x\ \Delta y\ \Delta z$ in einer ungeraden Potenz erscheint; es ist demnach unter dieser Voraussetzung:

$$S\,\mathfrak{H}\sin.\Delta u = S\,\mathfrak{H}\sin.(\alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y + \gamma\,\Delta z) = o$$

und folglich wird:

$$S\,\mathfrak{H}\,\Delta\cos.u = -2\cos.u\,S\,\mathfrak{H}\left(\sin.\frac{1}{2}\Delta u\right)^2$$

Führt man diesen Werth in die Differenzialgleichung (20) ein, so folgt:

$$\left.\begin{aligned}
o &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiiint\!\!\iint \left\{\begin{aligned} &2\frac{d^2\varphi}{dt^2} - 2\varphi\,S\,\mathfrak{A}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\Delta u\right)^2 - 2\psi\,S\,\mathfrak{F}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\Delta u\right)^2 \\ &\qquad - 2\omega\,S\,\mathfrak{E}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\Delta u\right)^2 \\ &\qquad + \varphi(\mathfrak{A}+\varepsilon) + \psi\,\mathfrak{F} + \omega\,\mathfrak{E}\end{aligned}\right\}\cos.u\,d\alpha..d\nu \\
o &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiiint\!\!\iint \left\{\begin{aligned} &2\frac{d^2\psi}{dt^2} - 2\varphi\,S\,\mathfrak{F}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\Delta u\right)^2 - 2\psi\,S\,\mathfrak{B}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\Delta u\right)^2 \\ &\qquad - 2\omega\,S\,\mathfrak{D}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\Delta u\right)^2 \\ &\qquad + \varphi\,\mathfrak{F} + \psi(\mathfrak{B}+\varepsilon) + \omega\,\mathfrak{D}\end{aligned}\right\}\cos.u\,d\alpha..d\nu \\
o &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiiint\!\!\iint \left\{\begin{aligned} &2\frac{d^2\omega}{dt^2} - 2\varphi\,S\,\mathfrak{E}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\Delta u\right)^2 - 2\psi\,S\,\mathfrak{D}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\Delta u\right)^2 \\ &\qquad - 2\omega\,S\,\mathfrak{C}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\Delta u\right)^2 \\ &\qquad + \varphi\,\mathfrak{E} + \psi\,\mathfrak{D} + \omega(\mathfrak{C}+\varepsilon)\end{aligned}\right\}\cos.u\,d\alpha.\,d\nu
\end{aligned}\right\}\ (21)$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\mathfrak{A}+\varepsilon) - S\,\mathfrak{A}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\Delta u\right)^2 &= l \\
\frac{1}{2}(\mathfrak{B}+\varepsilon) - S\,\mathfrak{B}_1\left(\sin\frac{1}{2}\Delta u\right)^2 &= m \\
\frac{1}{2}(\mathfrak{C}+\varepsilon) - S\,\mathfrak{C}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\Delta u\right)^2 &= n \\
\frac{1}{2}\mathfrak{D} - S\,\mathfrak{D}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\Delta u\right)^2 &= p \\
\frac{1}{2}\mathfrak{E} - S\,\mathfrak{E}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\Delta u\right)^2 &= q \\
\frac{1}{2}\mathfrak{F} - S\,\mathfrak{F}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\Delta u\right)^2 &= r
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

so wird den Gleichungen (21) Genüge geleistet, wenn man nimmt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\varphi}{dt^2} + l\varphi + r\psi + q\omega &= o \\
\frac{d^2\psi}{dt^2} + r\varphi + m\psi + p\omega &= o \\
\frac{d^2\omega}{dt^2} + q\varphi + p\psi + n\omega &= o
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Hierdurch hat man nun zur Bestimmung der in der Fourier'schen Formel vorkommenden Funktionen $\varphi\ \psi\ \omega$ drei Differenzialgleichungen.

Um diese Gleichungen zu integriren, versuchen wir die Annahme:

$$\varphi = \mathfrak{M}\,T \qquad \psi = \mathfrak{N}\,T \qquad \omega = \mathfrak{P}\,T \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

wobei wir voraussetzen, dass T eine Funktion von t sei, dass jedoch die Grössen $\mathfrak{M}\ \mathfrak{N}\ \mathfrak{P}$ kein t enthalten. Dann ist:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \mathfrak{M}\frac{d^2T}{dt^2} \qquad \frac{d^2\psi}{dt^2} = \mathfrak{N}\frac{d^2T}{dt^2} \qquad \frac{d^2\omega}{dt^2} = \mathfrak{P}\frac{d^2T}{dt^2} \quad \ldots \quad (25)$$

Hierdurch werden die Gleichungen (23):

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}\frac{d^2T}{dt^2} + (l\,\mathfrak{M} + r\,\mathfrak{N} + q\,\mathfrak{P})\,T &= o \\
\mathfrak{N}\frac{d^2T}{dt^2} + (r\,\mathfrak{M} + m\,\mathfrak{N} + p\,\mathfrak{P})\,T &= o \\
\mathfrak{P}\frac{d^2T}{dt^2} + (q\,\mathfrak{M} + p\,\mathfrak{N} + n\,\mathfrak{P})\,T &= o
\end{aligned}$$

und diesen Gleichungen wird Genüge geleistet, wenn man nimmt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} &= -\frac{l\mathfrak{M} - r\mathfrak{N} - q\mathfrak{P}}{\mathfrak{M}} = -\vartheta^2 \\
\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} &= -\frac{r\mathfrak{M} - m\mathfrak{N} + p\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}} = -\vartheta^2 \\
\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} &= -\frac{q\mathfrak{M} - p\mathfrak{N} - n\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}} = -\vartheta^2
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$T = \mathfrak{G}\cos.\vartheta t - \mathfrak{H}\sin.\vartheta t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

$$\left.\begin{aligned}
(l - \vartheta^2)\mathfrak{M} + r\mathfrak{N} - q\mathfrak{P} &= o \\
r\mathfrak{M} - (m - \vartheta^2)\mathfrak{N} - p\mathfrak{P} &= o \\
q\mathfrak{M} - p\mathfrak{N} + (n - \vartheta^2)\mathfrak{P} &= o
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Ferner findet man durch Elimination von $\mathfrak{M}\ \mathfrak{N}\ \mathfrak{P}$ aus diesen drei Gleichungen (28) folgende Gleichung:

$$(l - \vartheta^2)(m - \vartheta^2)(n - \vartheta^2) - p^2(l - \vartheta^2) - q^2(m - \vartheta^2) - r^2(n - \vartheta^2) + 2pqr = o \quad (29)$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf ϑ^2 vom dritten Grad, sie gibt also für ϑ^2 drei Werthe, und dann geben die Gleichungen (28) für jeden der drei Werthe von ϑ^2 bestimmte Werthe für $\mathfrak{M}\ \mathfrak{N}\ \mathfrak{P}$.

Die Gleichung (27) gibt endlich für die drei Werthe von ϑ^2 drei Werthe von T. Vermöge (24) erhalten wir daher sowohl für φ als auch für ψ und für ω drei Werthe. Bezeichnen wir die drei Werthe von ϑ^2 mit $\vartheta_1^2\ \vartheta_2^2\ \vartheta_3^2$ und die entsprechenden Werthe von $\mathfrak{M}\ \mathfrak{N}\ \mathfrak{P}\ \ \varphi\ \psi\ \omega$ dadurch, dass wir diesen Buchstaben Zahlen anhängen, so haben wir folgende zusammenhängende Grössen:

ϑ_1^2	gibt	$\mathfrak{M}_1\ \mathfrak{N}_1\ \mathfrak{P}_1$	$\varphi_1\ \psi_1\ \omega_1$
ϑ_2^2	„	$\mathfrak{M}_2\ \mathfrak{N}_2\ \mathfrak{P}_2$	$\varphi_2\ \psi_2\ \omega_2$
ϑ_3^2	„	$\mathfrak{M}_3\ \mathfrak{N}_3\ \mathfrak{P}_3$	$\varphi_3\ \psi_3\ \omega_3$

Die Werthe von $\vartheta^2\ \mathfrak{M}\ \mathfrak{N}\ \mathfrak{P}$ können durch eine geometrische Construktion zur Anschauung gebracht werden. Vorausgesetzt, dass alle drei Wurzeln der Gleichung (29) reell sind, so bedeuten diese drei Wurzeln $\vartheta_1^2\ \vartheta_2^2\ \vartheta_3^2$ die drei Halbaxen eines Elypsoides, dessen Gleichung ist:

$$lx^2 + my^2 + nz^2 + 2pyz + 2qxz + 2rxy = 1$$

und die Werthe von $\mathfrak{M}\ \mathfrak{N}\ \mathfrak{P}$ sind die Cosinuse der Winkel, welche die Richtungen der Axen des Elypsoides mit den Axen $ox\ oy\ oz$ bilden.

Die individuellen Werthe von $\mathfrak{M}$ $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{P}$ genügen daher den folgenden Beziehungen :

$$\left.\begin{array}{c}
\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 + \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 = 0 \\
\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_3 + \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_3 + \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_3 = 0 \\
\mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3 + \mathfrak{N}_2 \mathfrak{N}_3 + \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3 = 0 \\
\mathfrak{M}_1^2 + \mathfrak{N}_1^2 + \mathfrak{P}_1^2 = 1 \\
\mathfrak{M}_2^2 + \mathfrak{N}_2^2 + \mathfrak{P}_2^2 = 1 \\
\mathfrak{M}_3^2 + \mathfrak{N}_3^2 + \mathfrak{P}_3^2 = 1
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Vermöge der bisher gewonnenen Resultate erhalten wir nun für ξ υ ζ folgende Ausdrücke :

$$\left.\begin{array}{l}
\xi = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \mathfrak{S} \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \cos. u\, \mathfrak{M}\, (\mathfrak{G} \cos. \vartheta t + \mathfrak{H} \sin. \vartheta t)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu \\
\upsilon = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \mathfrak{S} \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \cos\, u\, \mathfrak{N}\, (\mathfrak{G} \cos. \vartheta t + \mathfrak{H} \sin. \vartheta t)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu \\
\zeta = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \mathfrak{S} \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \cos. u\, \mathfrak{P}\, (\mathfrak{G} \cos. \vartheta t + \mathfrak{H} \sin. \vartheta t)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu
\end{array}\right\} \quad (31)$$

In diesen Ausdrücken bedeutet das Zeichen $\mathfrak{S}$, dass die drei Wurzeln von (29) berücksichtigt werden sollen. Allein wenn ϑ_1^2 ϑ_2^2 ϑ_3^2 die drei Werthe von ϑ^2 sind, so erhält man für ϑ selbst folgende sechs Werthe :

$$+\vartheta_1 \quad +\vartheta_2 \quad +\vartheta_3 \qquad\qquad -\vartheta_1 \quad -\vartheta_2 \quad -\vartheta_3$$

Das Summenzeichen $\mathfrak{S}$ muss also, um die allgemeinsten Werthe von ξ υ ζ zu erhalten, sowohl auf die positiven wie auf die negativen Wurzeln bezogen werden.

Nun ist :

$$\cos. u \cos. \vartheta t = \frac{1}{2}\Big[\cos. (u + \vartheta t) + \cos. (u - \vartheta t)\Big]$$

$$\cos. u \sin. \vartheta t = \frac{1}{2}\Big[\sin. (u + \vartheta t) - \sin. (u - \vartheta t)\Big]$$

Daher wird :

$$\cos. u\, \mathfrak{M}\, (\mathfrak{G} \cos. \vartheta t + \mathfrak{H} \sin. \vartheta t) = \frac{1}{2} \mathfrak{M} \Big[\mathfrak{G} \cos. (u + \vartheta t) + \mathfrak{G} \cos. (u - \vartheta t)\Big]$$
$$+ \frac{1}{2} \mathfrak{M} \Big[\mathfrak{H} \sin. (u + \vartheta t) - \mathfrak{H} \sin. (u - \vartheta t)\Big]$$

oder wegen :

$$\frac{\sin.(u + \vartheta t)}{\vartheta} = \int_0^t \cos.(u + \vartheta t)\, d t$$

$$\cos. u\ \mathfrak{M}\,(\mathfrak{G} \cos. \vartheta t - \mathfrak{H} \sin \vartheta t) = \frac{1}{2}\,\mathfrak{M} \left| \mathfrak{G} \cos.(u + \vartheta t) - \mathfrak{G} \cos.(u - \vartheta t) \right|$$

$$+ \frac{1}{2}\,\mathfrak{M}\,\vartheta \left| \mathfrak{H} \int \cos.(u - \vartheta t)\, d t - \mathfrak{H} \int \cos.(u - \vartheta t)\, d t \right|$$

Dehnt man die Summe $\mathfrak{S}$ auf die positiven und negativen Wurzeln aus, so kann man schreiben :

$$\mathfrak{S} \cos u\ \mathfrak{M}\,(\mathfrak{G} \cos. \vartheta t - \mathfrak{H} \sin. \vartheta t) = \frac{1}{2}\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{M} \left| \mathfrak{G} \cos.(u - \vartheta t) - \mathfrak{G}_1 \int \cos.(u - \vartheta t) \right|$$

wobei gesetzt wurde $\vartheta \mathfrak{H} = \mathfrak{G}_1$.

Somit erhält man nun :

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{16\,\pi^3}\,\mathfrak{S} \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \mathfrak{M} \left[\mathfrak{G} \cos.(u - \vartheta t) + \mathfrak{G}_1 \int_0^t \cos.(u - \vartheta t)\, d t \right] d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu \\
\eta &= \frac{1}{16\,\pi^3}\,\mathfrak{S} \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \mathfrak{N} \left| \mathfrak{G} \cos.(u - \vartheta t) - \mathfrak{G}_1 \int_0^t \cos.(u - \vartheta t)\, d t \right| d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu \\
\zeta &= \frac{1}{16\,\pi^3}\,\mathfrak{S} \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \mathfrak{P} \left| \mathfrak{G} \cos.(u - \vartheta t) + \mathfrak{G}_1 \int_0^t \cos.(u - \vartheta t)\, d t \right| d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu
\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Diesen Gleichungen kann man mit Hülfe einer geometrischen Betrachtung noch eine andere Form geben. Die hiezu dienliche Figur wird man sich vermittelst der folgenden Erklärung leicht machen können.

Betrachten wir :

$\alpha\,\beta\,\gamma$ als Coordinaten eines Punktes A ;
x y z „ „ des „ M ;
$\lambda\,\mu\,\nu$ „ „ eines „ L ;

und verbinden die Punkte A M L mit dem Anfangspunkt O, fällen ferner von M und L auf OA die Perpendikel Mm und Ll, und setzen :

$$\overline{OL} = \varrho_1 \qquad \overline{OM} = R \qquad \overline{OA} = \varrho$$

$$\overline{Ol} = p_1 \qquad \overline{Om} = p$$

so ist :

$$\cos.\ \widehat{L\,O\,l} = \frac{p_1}{\varrho_1} = \frac{\lambda}{\varrho_1}\,\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\mu}{\varrho_1}\,\frac{\beta}{\varrho} + \frac{\nu}{\varrho_1}\,\frac{\gamma}{\varrho}$$

$$\cos.\ \widehat{M\,O\,m} = \frac{p}{R} = \frac{\alpha}{\varrho}\,\frac{x}{R} + \frac{\beta}{\varrho}\,\frac{y}{R} + \frac{\gamma}{\varrho}\,\frac{z}{R}$$

Demnach:

$$p_1\,\varrho = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu$$

$$p\,\varrho = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

Nimmt man die Differenz dieser zwei Ausdrücke, so wird:

$$p\,\varrho - p_1\,\varrho = \alpha\,(x - \lambda) + \beta\,(y - \mu) + \gamma\,(z - \nu)$$

Man hat daher vermöge der Gleichung (16), Seite 118:

$$p\,\varrho - p_1\,\varrho = u$$

und folglich:

$$\cos.\ (u - \vartheta t) = \cos.\ (p\,\varrho - p_1\,\varrho - \vartheta t) = \cos.\ (p\,\varrho - \vartheta t)\ \cos.\ p_1\,\varrho + \sin.\ (p\,\varrho - \vartheta t)\ \sin.\ p_1\,\varrho$$

Führt man diesen Werth von $\cos.\,(u - \vartheta t)$ in die Gleichungen (32) ein, so findet man:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{16\,\pi^3}\ \mathfrak{S}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \mathfrak{M}\,\mathfrak{G}\Big[\cos.\,(\varrho\,p - \vartheta t)\ \cos.\ \varrho\,p_1 + \sin.\,(\varrho\,p - \vartheta t)\ \sin.\ \varrho\,p_1\Big]\,d\alpha \ldots d\nu \\
&+ \frac{1}{16\,\pi^3}\int_0^t \mathfrak{S}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \mathfrak{M}\,\mathfrak{G}_1\Big[\cos.\,(\varrho\,p - \vartheta t)\ \cos.\ \varrho\,p_1 + \sin.\,(\varrho\,p - \vartheta t)\ \sin.\ \varrho\,p_1\Big]\,d\alpha \ldots d\nu\,dt \\
\upsilon &= \frac{1}{16\,\pi^3}\ \mathfrak{S}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \mathfrak{N}\,\mathfrak{G}\Big[\cos.\,(\varrho\,p - \vartheta t)\ \cos.\ \varrho\,p_1 + \sin.\,(\varrho\,p - \vartheta t)\ \sin.\ \varrho\,p_1\Big]\,d\alpha \ldots d\nu \\
&+ \frac{1}{16\,\pi^3}\int_0^t \mathfrak{S}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \mathfrak{N}\,\mathfrak{G}_1\Big[\cos.\,(\varrho\,p - \vartheta t)\ \cos.\ \varrho\,p_1 + \sin.\,(\varrho\,p - \vartheta t)\ \sin\ \varrho\,p_1\Big]\,d\alpha \ldots d\nu\,dt \\
\zeta &= \frac{1}{16\,\pi^3}\ \mathfrak{S}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \mathfrak{P}\,\mathfrak{G}\Big[\cos.\,(\varrho\,p - \vartheta t)\ \cos\ \varrho\,p_1 + \sin.\,(\varrho\,p - \vartheta t)\ \sin.\ \varrho\,p_1\Big]\,d\alpha \ldots d\nu \\
&+ \frac{1}{16\,\pi^3}\int_0^t \mathfrak{S}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \mathfrak{P}\,\mathfrak{G}_1\Big[\cos.\,(\varrho\,p - \vartheta t)\ \cos.\ \varrho\,p_1 + \sin.\,(\varrho\,p - \vartheta t)\ \sin.\ \varrho\,p_1\Big]\,d\alpha \ldots d\nu\,dt
\end{aligned}\right\}\ (33)$$

Denkt man sich die Integrationen in Bezug auf $\lambda\ \mu\ \nu$ ausgeführt und setzt zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned}
&\iiint \cos.\ \varrho\, p_1\ \mathfrak{G}\ d\lambda\, d\mu\, d\nu = \mathfrak{K} \\
&\iiint \sin.\ \varrho\, p_1\ \mathfrak{G}\ d\lambda\, d\mu\, d\nu = \mathfrak{K}_1 \\
&\iiint \cos.\ \varrho\, p_1\ \mathfrak{G}_1\ d\lambda\, d\mu\, d\nu = \mathfrak{Z} \\
&\iiint \sin.\ \varrho\, p_1\ \mathfrak{G}_1\ d\lambda\, d\mu\, d\nu = \mathfrak{Z}_1
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

$$16\,\pi^3\,\Pi = \left\{\begin{aligned}
&\cos.\ (\varrho\, p - \vartheta\, t)\ \mathfrak{K} + \sin.\ (\varrho\, p - \vartheta\, t)\ \mathfrak{K}_1 + \\
&+ \int_0^t \Big[\cos.\ (\varrho\, p - \vartheta\, t)\ \mathfrak{Z} + \sin.\ (\varrho\, p - \vartheta\, t)\ \mathfrak{Z}_1\Big]\, d\,t
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (35)$$

so erhält man endlich :

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \mathfrak{S}\iiint \mathfrak{M}\ \Pi\ d\alpha\, d\beta\, d\gamma \\
\upsilon &= \mathfrak{S}\iiint \mathfrak{N}\ \Pi\ d\alpha\, d\beta\, d\gamma \\
\zeta &= \mathfrak{S}\iiint \mathfrak{P}\ \Pi\ d\alpha\, d\beta\, d\gamma
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Dies sind nun endlich die Integrale der Gleichungen (14), und zwar in einer Form, welche eine Interpretation zulässt, so dass wir über den Bewegungszustand des Aethers im Doppelmedium eine Vorstellung erhalten.

Die Gleichung (35) kann auf folgende Weise umgestaltet werden.

Bezeichnet man mit Π_0 den Werth von Π für $t = o$, und durch Π'_0 den Werth von $\frac{d\,\Pi}{d\,t}$ für $t = o$, so hat man :

$$16\,\pi^3\,\Pi_0 = \cos.\ \varrho\, p\ \mathfrak{K} + \sin.\ \varrho\, p\ \mathfrak{K}_1$$
$$16\,\pi^3\,\Pi'_0 = \cos.\ \varrho\, p\ \mathfrak{Z} + \sin.\ \varrho\, p\ \mathfrak{Z}_1$$

Die Grössen $\mathfrak{K}\ \mathfrak{K}_1\ \mathfrak{Z}\ \mathfrak{Z}_1$ sind Funktionen von $\alpha\ \beta\ \gamma$, aber nicht von p; wir können daher schreiben :

$$\cos.\ \varrho\, p\ \mathfrak{K} + \sin.\ \varrho\, p\ \mathfrak{K}_1 = F\,(\varrho\, p)$$
$$\cos.\ \varrho\, p\ \mathfrak{Z} + \sin.\ \varrho\, p\ \mathfrak{Z}_1 = F'(\varrho\, p)$$

wobei $F\ F'$ Funktionszeichen sind. Dann aber ist consequenter Weise zu schreiben :

$$\cos.\ (\varrho\, p - \vartheta\, t)\ \mathfrak{K} + \sin.\ (\varrho\, p - \vartheta\, t)\ \mathfrak{K}_1 = F\,(\varrho\, p - \vartheta\, t)$$
$$\cos.\ (\varrho\, p - \vartheta\, t)\ \mathfrak{Z} + \sin.\ (\varrho\, p - \vartheta\, t)\ \mathfrak{Z}_1 = F'(\varrho\, p - \vartheta\, t)$$

Demnach wird der Ausdruck (35) :

$$16\,\pi^2\,\Pi = F\,(\varrho\,p - \vartheta\,t) + \int_0^t F'\,(\varrho\,p - \vartheta\,t)\,dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Es ist offenbar $F\,(\varrho\,p)$ der initiale Werth der Verschiebung $\mathfrak{M}\,\xi + \mathfrak{N}\,\nu + \mathfrak{P}\,\zeta$, und $F'\,(\varrho\,p)$ die anfängliche Geschwindigkeit.

Wenn wir annehmen, dass am Anfang der Zeit eine Bewegung nur allein in einer unendlich kleinen Entfernung vom Anfangspunkt der Coordinaten erregt worden ist, haben die Funktionen F und F' nur dann endliche Werthe, wenn für die Veränderliche ein sehr kleiner Werth gesetzt wird. Daraus sieht man, dass bei einem solchen Initial-Zustand Π nur dann einen Werth hat, wenn $\varrho\,p - \vartheta\,t$ sehr klein oder nahe gleich Null ist, d. h. es ist nach Verlauf der Zeit t nur an den Orten Bewegung vorhanden, für welche $\varrho\,p - \vartheta\,t = o$, oder

$$p = \frac{\vartheta}{\varrho}\,t$$

ist; der ganze übrige Raum ist ruhig.

INTERPRETATION DER INTEGRALE.

Betrachten wir die Methode, welche uns zur Integration der Gleichungen (14), Seite 118, geführt hat, genauer, so ersieht man, dass

$$\cos n\,.\,\varphi \qquad\qquad \cos n\,.\,\psi \qquad\qquad \cos n\,.\,\omega$$

partikuläre Integralien der genannten Gleichungen darstellen, denn die in den Klammern stehenden Ausdrücke der Gleichungen (21) wurden Null gesetzt, und daraus $\varphi\;\psi\;\omega$ bestimmt. Daraus folgt, dass $\mathfrak{M}\,\Pi\;\;\mathfrak{N}\,\Pi\;\;\mathfrak{P}\,\Pi$ ebenfalls partikuläre Werthe von $\xi\;\nu\;\zeta$ sind, und dass die totalen Werthe dieser Grössen aus unendlich vielen partikulären Werthen zusammengesetzt sind. Die Bewegung eines Punktes $x\;y\;z$ besteht daher aus unendlich vielen Elementarbewegungen, von denen jede möglicher Weise isolirt auftreten könnte.

Wir wollen nun eine solche Elementarbewegung

$$\mathfrak{M}\,\Pi \qquad \mathfrak{N}\,\Pi \qquad \mathfrak{P}\,\Pi$$

näher betrachten.

Betrachten wir zunächst die Bewegungen aller Punkte, welche in einer in m auf OA senkrechten Ebene liegen, so hat für alle Punkte dieser Ebene p den gleichen Werth. Demnach machen alle Punkte dieser Ebene identische Elementarbewegungen, denn der Grösse nach stimmen diese Bewegungen überein, weil Π nur von p abhängt, und der Richtung nach stimmen diese Bewegungen überein, weil $\mathfrak{M}\;\mathfrak{N}\;\mathfrak{P}$ nur allein von $\alpha\;\beta\;\gamma$ abhängen. Für eine zweite auf OA senkrechte Ebene hat p einen andern Werth, mithin

auch Π; allein $\mathfrak{M}$ $\mathfrak{N}$ $\mathfrak{P}$ (die, wie gesagt, nur von α β γ abhängen, sich also nur ändern, wenn die Lage des Punktes A verändert wird) haben die gleichen Werthe wie in der ersten Ebene. Die Schwingungsrichtungen (Polarisationsrichtungen) in allen auf AO senkrechten Ebenen stimmen also überein.

Aendert sich p um $\frac{2\pi}{\varrho}$, so erhält Π wiederum den gleichen Werth. Denkt man sich also den ganzen unendlichen Raum durch Ebenen getheilt, die auf OA senkrecht stehen, und von denen je zwei unmittelbar auf einander folgende um $\frac{2\pi}{\varrho}$ abstehen, so sind für einen bestimmten Zeitmoment (für ein bestimmtes t) die Bewegungszustände in allen Schichten von der Dicke $\frac{2\pi}{\varrho}$ gleich gross. Wir wollen die im schwingenden Zustand befindliche Aethermasse einer Schichte eine elementare Lichtwelle nennen, und die Dicke dieser Schichte Wellenlänge. Nennen wir diese λ, setzen also:

$$\frac{2\pi}{\varrho} = \lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Aendert sich t um $\frac{2\pi}{\vartheta}$, so erhält Π für einen und denselben Werth von p wiederum den gleichen Werth, d. h. der Schwingungszustand in einer bestimmten, auf OA senkrechten Ebene ist ein periodischer nach Verlauf einer Zeit $\frac{2\pi}{\vartheta}$ wiederkehrender. $\frac{2\pi}{\vartheta}$ drückt also in einer Elementarbewegung die Schwingungszeit des Massenmittelpunktes einer Aetherhülle aus. Nennen wir diese Schwingungszeit T, setzen also:

$$T = \frac{2\pi}{\vartheta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Während der Zeit T einer Schwingung rückt die ganze wandelbare Form der Welle um $\frac{2\pi}{\varrho} = \lambda$ vorwärts. Die Geschwindigkeit v der Fortpflanzung dieser Bewegung ist demnach gleich dem Quotienten aus der Wellenlänge und der Schwingungszeit. Setzt man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v, so hat man:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\frac{2\pi}{\varrho}}{\frac{2\pi}{\vartheta}} = \frac{\vartheta}{\varrho}$$

Jeder bestimmte Punkt des ganzen unbegränzten Mediums veranlasst also in dem ganzen Medium einen Bewegungszustand, dem folgende Eigenschaften zukommen.

Für einen bestimmten Punkt haben α β γ bestimmte Werthe. Nun sind l m n p q r (Ausdrücke 22, S. 121) reine Funktionen von $\alpha\beta\gamma$, daher gibt die kubische Gleichung (29) für jeden bestimmten Punkt (α β γ) drei Werthe ϑ_1^2 ϑ_2^2 ϑ_3^2 für ϑ^2, und diese Werthe in die Gleichungen (28) gesetzt, so erhält man für $\mathfrak{M}$ $\mathfrak{N}$ $\mathfrak{P}$ die drei Systeme von Werthen:

$$\begin{matrix} \mathfrak{M}_1 & \mathfrak{N}_1 & \mathfrak{P}_1 \\ \mathfrak{M}_2 & \mathfrak{N}_2 & \mathfrak{P}_2 \\ \mathfrak{M}_3 & \mathfrak{N}_3 & \mathfrak{P}_3 \end{matrix}$$

Betrachten wir zunächst die Bewegung, welche einem solchen System, z. B. dem System

$$\vartheta_1 \quad \mathfrak{M}_1 \quad \mathfrak{N}_1 \quad \mathfrak{P}_1$$

entspricht, so besteht diese Bewegung aus einer Reihenfolge von auf OA senkrechten Wellen von der Länge $\lambda = \frac{2\pi}{\varrho}$. Die Schwingungszeit jedes Aethertheilchens sämmtlicher Wellen ist gleich $T = \frac{2\pi}{\vartheta_1}$, und diese Wellen bewegen sich längs der Linie OA fort mit einer Geschwindigkeit $v = \frac{\vartheta}{\varrho}$. Die Schwingungsrichtungen stimmen für alle Aethertheilchen überein und werden durch die Werthe von $\mathfrak{M}_1$ $\mathfrak{N}_1$ $\mathfrak{P}_1$ bestimmt.

Aehnliche Wellensysteme liefern die beiden andern Wurzeln ϑ_2 ϑ_3. Wir erhalten daher drei Wellensysteme, deren Zustand durch folgendes Schema anschaulich wird.

	Wellensystem für ein bestimmtes $\alpha\,\beta\,\gamma$. I.	II.	III.
Wellenlänge	$\lambda = \frac{2\pi}{\varrho}$	$\lambda = \frac{2\pi}{\varrho}$	$\lambda = \frac{2\pi}{\varrho}$
Schwingungszeit.	$T_1 = \frac{2\pi}{\vartheta_1}$	$T_2 = \frac{2\pi}{\vartheta_2}$	$T_3 = \frac{2\pi}{\vartheta_3}$
Fortpflanzungsgeschwindigkeit .	$v_1 = \frac{\vartheta_1}{\varrho}$	$v_2 = \frac{\vartheta_2}{\varrho}$	$v_3 = \frac{\vartheta_3}{\varrho}$
Polarisationsrichtungen . . .	$\mathfrak{M}_1\, \mathfrak{N}_1\, \mathfrak{P}_1$	$\mathfrak{M}_2\, \mathfrak{N}_2\, \mathfrak{P}_2$	$\mathfrak{M}_3\, \mathfrak{N}_3\, \mathfrak{P}_3$

Es ist von grösster Wichtigkeit, zu bemerken, dass zwischen ϑ und ϱ oder zwischen ϑ und λ eine gewisse Abhängigkeit besteht. Denn ϑ wird durch $l\,m\,n\,p\,q\,r$ bestimmt, diese Grössen hängen aber von $\alpha\,\beta\,\gamma$ oder von ϱ ab. Jedes individuelle ϱ liefert demnach drei individuelle Werthe für ϑ^2. Auch muss noch bemerkt werden, dass $l\,m\,n\,p\,q\,r$ von der Constitution des Mediums abhängt, dass mithin ϑ^2 eine Funktion nicht nur von $\alpha\,\beta\,\gamma$ oder von ϱ, sondern auch von der Natur des Mediums ist. Endlich ist noch in Erinnerung zu bringen, dass die drei Polarisationsrichtungen, welche durch $\mathfrak{M}_1\, \mathfrak{N}_1\, \mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{M}_2\, \mathfrak{N}_2\, \mathfrak{P}_2$ $\mathfrak{M}_3\, \mathfrak{N}_3\, \mathfrak{P}_3$ bestimmt werden, auf einander senkrecht stehen.

Mit Worten ausgesprochen, ist der Sinn des aufgestellten Schemas folgender:

1. Jeder individuelle Punkt A des Mediums veranlasst drei Systeme von Wellen.
2. Diese drei Wellensysteme stehen senkrecht auf OA, sind also zu einander parallel.
3. In jedem einzelnen der drei Wellensysteme sind die Bewegungsrichtungen (Polarisationsrichtungen) parallel.
4. Die Polarisationsrichtungen in den drei Wellensystemen stehen auf einander senkrecht.
5. Die Wellenlängen stimmen in den drei Systemen überein, und hängen nur allein von der Wahl des Punktes A ab.
6. Die Schwingungszeiten sind in den drei Wellensystemen nicht gleich gross, und hängen auch von der Natur des Mediums ab; wenn also in zwei verschiedenen Medien durch gleich grosse Werthe von ϱ Wellen erregt werden, so sind zwar

die Wellenlängen in beiden Medien gleich gross, allein die Schwingungszeiten sind ungleich.

7. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sind in den drei Wellensystemen ungleich, und diese Fortpflanzungsgeschwindigkeiten hängen auch von der Natur des Mediums ab.
8. Die Schwingungsgeschwindigkeiten, so wie auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, stehen in einem Zusammenhang mit der Wellenlänge und mit der Natur des Mediums.

Hiermit ist nun der gesammte Gehalt eines partikulären Integrales ausgesprochen. Nun besteht aber das totale Integral aus unendlich vielen partikulären Integralen, die sich ergeben, wenn man für $\alpha\ \beta\ \gamma$ alle möglichen Werthe annimmt. Die ganze Bewegung besteht also aus unendlich vielen dreifachen Wellensystemen und die Bewegungsrichtungen der Wellensysteme sind im Allgemeinen verschieden, weil sie mit der Richtung AO zusammenfallen.

Um nun diese Ergebnisse der Rechnung mit den Beobachtungen in Zusammenhang zu bringen, müssen insbesondere folgende Fragen beantwortet werden:

1. Wodurch wird die Farbe bestimmt?
2. Wodurch wird ein Lichtstrahl bestimmt?

Um diese Fragen zu beantworten, ist es nothwendig, die Beziehung, welche zwischen der Schwingungsgeschwindigkeit und Wellenlänge besteht, ausfindig zu machen, was wir im Folgenden wenigstens für ein einfach brechendes Medium thun werden.

ABHÄNGIGKEIT ZWISCHEN WELLENLÄNGE, FORTPFLANZUNGSGESCHWINDIGKEIT UND SCHWINGUNGSGESCHWINDIGKEIT IN EINEM EINFACH BRECHENDEN MEDIUM.

In einem einfach brechenden Medium, in welchem also die Elastizität nach allen Richtungen um jeden Punkt herum gleich ist, regen alle von dem Aufangspunkt der Coordinaten gleich weit entfernten Atome identische Elementarwellen an, es ist also in diesem Falle genügend, die Bewegungsverhältnisse irgend einer dieser Elementarwellen zu untersuchen, und wir nehmen deshalb den Erregungspunkt in der Axe $O\,x$ an, d. h. wir setzen:

$$\beta = o \qquad \gamma = o \qquad \text{demnach} \quad \Delta u = \alpha\,\Delta x$$

Für ein Medium, das nach allen Richtungen einerlei Elastizität hat, ist vermöge der Ausdrücke (8) und (9), Seite 116:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} \qquad \mathfrak{F} = \mathfrak{G} = \mathfrak{D} = o$$

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{d r} \varDelta x^2\right]$$

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{d r} \varDelta y^2\right]$$

$$\mathfrak{C}_1 = \frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{d r} \varDelta z^2\right]$$

$$\mathfrak{F}_1 = o \qquad \mathfrak{G}_1 = o \qquad \mathfrak{D}_1 = o$$

und daher werden die Ausdrücke (22), Seite 121 :

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{1}{2}(\mathfrak{A} + \epsilon) - S\,\frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{d r} \varDelta x^2\right]\left(\sin.\frac{1}{2}\alpha \varDelta x\right)^2 \\ m &= \frac{1}{2}(\mathfrak{A} + \epsilon) - S\,\frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{d r} \varDelta y^2\right]\left(\sin.\frac{1}{2}\alpha \varDelta x\right)^2 \\ n &= \frac{1}{2}(\mathfrak{A} + \epsilon) - S\,\frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{d r} \varDelta z^2\right]\left(\sin.\frac{1}{2}\alpha \varDelta x\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (38)$$

$$p = o \qquad q = o \qquad r = o$$

Vermöge $p = q = r = o$ wird die kubische Gleichung (29), Seite 122 :

$$(l - \vartheta^2)(m - \vartheta^2)(n - \vartheta^2) = o$$

Demnach hat man :

$$\vartheta_1^2 = l \qquad \vartheta_2^2 = m \qquad \vartheta_3^2 = n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (39)$$

oder weil vermöge des Ausdrucks (38) $m = n$ ist :

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_1^2 &= \frac{1}{2}(\mathfrak{A} + \epsilon) - S\,\frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{d r} \varDelta x^2\right]\left(\sin.\frac{1}{2}\alpha \varDelta x\right)^2 \\ \vartheta_2^2 = \vartheta_3^2 &= \frac{1}{2}(\mathfrak{A} + \epsilon) - S\,\frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{d r} \varDelta y^2\right]\left(\sin.\frac{1}{2}\alpha \varDelta x\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

In diesen Summen haben nur diejenigen Glieder einen ansehnlichen Werth, für welche $\varDelta x$ und r klein ist, denn wie auch α angenommen werden mag, so bleibt $\left(\sin.\frac{1}{2}\alpha \varDelta x\right)^2$

stets kleiner als die Einheit, und die Funktionen $J(r)$ und $\frac{d\left(\frac{1}{r}J(r)\right)}{dr}$ haben nur für sehr kleine Werthe von r einen beträchtlicheren Werth. Nun ist:

$$\left(\sin.\frac{1}{2}\alpha\,\Delta x\right)^2 = \frac{1}{2}(1-\cos.\alpha\,\Delta x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2\Delta x^2}{1.2} - \frac{\alpha^4\Delta x^4}{1..4} + \frac{\alpha^6\Delta x^6}{1....6} - \ldots\ldots\right)$$

Daher wird:

$$\vartheta_2^2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{A}+\varepsilon) - S\frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}J(r)\right)}{dr}\Delta y^2\right]\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2\Delta x^2}{1.2} - \frac{\alpha^4\Delta x^4}{1..4} + \frac{\alpha^6\Delta x^6}{1....6} - \ldots\ldots\ldots\right)$$

oder:

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta_2^2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{A}+\varepsilon) &- \frac{1}{2}\alpha^2 S\frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}J(r)\right)}{dr}\Delta y^2\right]\frac{\Delta x^2}{1.2}\\
&+ \frac{1}{2}\alpha^4 S\frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}J(r)\right)}{dr}\Delta y^2\right]\frac{\Delta x^4}{1..4}\\
&- \frac{1}{2}\alpha^6 S\frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}J(r)\right)}{dr}\Delta y^2\right]\frac{\Delta x^6}{1....6}\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\quad (41)\ *)$$

Man erhält demnach für ϑ_2^2 einen Ausdruck von der Form:

$$\vartheta_2^2 = A_0 + A_2\alpha^2 + A_4\alpha^4 + A_6\alpha^6 + \ldots.$$

wobei $A_0\,A_2\,A_4\,A_6$ Grössen sind, die von der Beschaffenheit des Mediums abhängen. Allein A_0 hängt nur allein von den Körperatomen ab und $A_2\,A_4\,A_6$ vom Aether.

Es ist klar, dass die Coeffizienten $A_2\,A_4\,A_6$ sehr kleine Grössen sind, denn entweder sind die Funktionen $J(r)$, $\frac{d\left(\frac{1}{r}J(r)\right)}{dr}$, oder es sind die Werthe von Δx sehr klein; wir dürfen uns daher wohl erlauben, nur die drei ersten Glieder der letzten Gleichung in Rechnung zu bringen, setzen also:

$$\vartheta_2^2 = A_0 + A_2\alpha^2 + A_4\alpha^4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

---

*) Es wäre sehr wichtig, wenn man die in (41) vorkommende Summe berechnen, oder wenigstens die analytische Natur dieser Funktion angeben könnte. Wenn sich beweisen liesse, dass sie eine periodische Funktion wäre, so würde vielleicht darin der Grund zu den dunkeln Linien des Spektrums zu suchen sein.

Hiermit ist nun eine Abhängigkeit zwischen ϑ_2 und α aufgefunden, welche, wie wir bald sehen werden, die Farbenzerstreuung des Lichtes bei Brechungen erklärt. Bevor wir jedoch zur Erklärung der Dispersion schreiten, wollen wir vorerst noch die Schwingungsrichtungen in den drei Elementarwellen untersuchen.

Setzen wir in den Gleichungen (28), S. 122, $p = q = r = o$, $m = n$, so werden dieselben:

$$(l - \vartheta^2)\mathfrak{M} = o \qquad (m - \vartheta^2)\mathfrak{N} = o \qquad (m - \vartheta^2)\mathfrak{P} = o$$

Demnach erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{lll} (l - \vartheta_1^2)\mathfrak{M}_1 = o & (m - \vartheta_1^2)\mathfrak{N}_1 = o & (m - \vartheta_1^2)\mathfrak{P}_1 = o \\ (l - \vartheta_2^2)\mathfrak{M}_2 = o & (m - \vartheta_2^2)\mathfrak{N}_2 = o & (m - \vartheta_2^2)\mathfrak{P}_2 = o \\ (l - \vartheta_3^2)\mathfrak{M}_3 = o & (m - \vartheta_3^2)\mathfrak{N}_3 = o & (m - \vartheta_3^2)\mathfrak{P}_3 = o \end{array}\right\} \quad . \; . \; (43)$$

Allein es ist:

$$\vartheta_1 - l = o \qquad \vartheta_2^2 - m = o \qquad \vartheta_3^2 - m = o$$

Den Gleichungen (43) kann also entsprochen werden durch:

$\mathfrak{M}_1$ unbestimmt	$\mathfrak{N}_1 = o$	$\mathfrak{P}_1 = o$
$\mathfrak{M}_2 = o$	$\mathfrak{N}_2$ unbestimmt	$\mathfrak{P}_2$ unbestimmt
$\mathfrak{M}_3 = o$	$\mathfrak{N}_3$ unbestimmt	$\mathfrak{P}_3$ unbestimmt

Berücksichtigt man noch, dass $\mathfrak{M}_1^2 + \mathfrak{N}_1^2 + \mathfrak{P}_1^2 = 1$ ist, so folgt wegen $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{P}_1 = o$ $\mathfrak{M}_1 = 1$.

Die Schwingungsrichtung der Elementarwelle, welcher ϑ_1^2 entspricht, ist daher parallel mit der Axe der x oder senkrecht auf der Wellenebene, und die Schwingungsrichtung in den beiden andern zusammenfallenden Wellenebenen fällt daher in die Wellenebene selbst oder steht senkrecht auf der Fortpflanzungsrichtung der Welle. Nur diese letztere gibt Lichtwirkungen, daher wir auch nur die Beziehung zwischen α und ϑ_2^2 gesucht haben. Die physikalische Bedeutung der Welle, in welcher die Schwingungsrichtung mit der Fortpflanzungsrichtung zusammenfällt, ist vorläufig noch nicht enträthselt, ich vermuthe aber, dass sie Wärmewirkungen hervorbringt, obgleich ich wohl weiss, dass die Physiker gefunden haben wollen, dass auch die strahlende Wärme auf Transversalschwingungen beruhe.

DIE FARBE.

Bei dem Uebergang eines farbigen Lichtstrahles aus einem Medium in ein anderes tritt im Allgemeinen (wenn nämlich die Richtung des einfallenden Strahles auf der Trennungsfläche der Medien nicht senkrecht steht) eine Ablenkung der Richtung, aber keine

Aenderung der Farbe ein. Es muss also die Farbe durch diejenige Grösse bestimmt werden, welche bei dem Uebergang eines Strahles constant bleibt. Nach der von *Cauchy* entwickelten Theorie der Brechung ändert sich bei dem Uebergang eines Strahles die Wellenlänge, bleibt dagegen die Schwingungszeit constant: wir müssen also schliessen, dass die Farbe durch die Schwingungszeit und nicht durch die Wellenlänge bestimmt wird.

Es ist für einen Strahl von bestimmter Farbe in einem bestimmten Medium

$$v = \frac{\lambda\, \vartheta}{2\, \pi}$$

Für einen Strahl von anderer Farbe in einem andern Medium

$$v_1 = \frac{\lambda_1\, \vartheta_1}{2\, \pi}$$

Demnach:

$$\frac{v}{v_1} = \frac{\lambda\, \vartheta}{\lambda_1\, \vartheta_1}$$

Für einen Strahl von bestimmter Farbe in zwei verschiedenen Medien ist aber $\vartheta = \vartheta_1$, demnach:

$$\frac{v}{v_1} = \frac{\lambda}{\lambda_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

d. h. die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes von bestimmter Farbe in zwei verschiedenen Medien verhalten sich wie die Wellenlängen in den zwei Medien. Allein das Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ist gleich dem Brechungsverhältniss. Bezeichnet man dieses mit $\varkappa$, so hat man:

$$\varkappa = \frac{v}{v_1} = \frac{\lambda}{\lambda_1}$$

und hieraus folgt:

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{\varkappa} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

d. h. wenn ein Strahl von einer bestimmten Farbe aus einem Medium $(\lambda\, v)$ in ein Medium $(\lambda_1\, v_1)$ übergeht, findet man die Wellenlänge λ_1 in dem zweiten Medium, wenn man die Wellenlänge λ im ersten Medium durch das Brechungsverhältniss $\varkappa$ dividirt.

DIE DISPERSION DES LICHTES.

Ein in der Axe $o\, x$ liegender von o um a entfernter Punkt regt eine Elementarwelle an, deren Wellenlänge $\lambda = \frac{2\, \pi}{a}$ ist und welcher eine Schwingungszeit ϑ entspricht. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Welle ist:

$$v = \frac{\frac{2\pi}{\alpha}}{\frac{2\pi}{\vartheta}} = \frac{\vartheta}{\alpha}$$

Zwischen ϑ und α besteht aber die Beziehung (42). Eliminirt man aus derselben ϑ, indem man dafür den Werth $\vartheta = \alpha v$ setzt, so folgt aus dieser Beziehung:

$$v^2 = \frac{A_0}{\alpha^2} + A_2 + A_4 \alpha^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

Dies ist also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Elementarwelle, welche der von o um α entfernte Punkt anregt, und diese hängt von α ab. Allein die totale Bewegung besteht aus allen Wellen, welche sämmtliche Punkte des Mediums anregen; man erhält also die Totalität der Wellen, welche längs der positiven Richtung der Axe $o\,x$ fortlaufen, wenn man für α alle Werthe von 0 bis ∞ setzt. Allein vermöge der Beziehung (46) hat jede Elementarwelle dieses Wellensystems eine andere Wellenlänge, eine andere Schwingungszeit, mithin eine andere Farbe, und auch eine andere Fortpflanzungsgeschwindigkeit, vorausgesetzt, dass die Coefficienten $A_0\,A_4$ von Null verschieden sind.

Nach den physikalischen Thatsachen muss man annehmen, dass weisses Licht zum Vorschein kommt, wenn alle farbigen Strahlen zusammenfallen, also alle gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit haben. Nach den Thatsachen der Physik muss man ferner annehmen, dass sich im leeren Raum weisses Licht unzerlegt fortpflanzt, und dass selbst in der Luft kaum farbige Wirkungen auftreten, wir müssen daher schliessen, dass für den leeren Raum, so wie auch für Luft A_0 und A_4 entweder ganz genau Null, oder doch verschwindend klein sind. Für den leeren Raum ist aber wirklich nach unserer Theorie A_0 absolut gleich Null, denn im leeren Raum gibt es keine Körperatome, sondern nur Aetheratome. A_4 ist aber nicht absolut Null, wohl aber ungemein klein, wie eine Vergleichung der Ausdrücke (41) und (42) zeigt. Unsere Theorie ist also hier mit den Thatsachen in guter Uebereinstimmung, und wir können daher annehmen, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten im leeren Raum und auch in der Luft für alle Farben einerlei Werth haben. Nennen wir nun G diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit, l die Wellenlänge einer gewissen Farbe in der Luft oder im leeren Raum, $\varkappa$ das Brechungsverhältniss, das dem Uebergang des Strahles aus Luft in ein brechendes Medium entspricht, so ist vermöge (44) und (45):

$$\frac{v}{G} = \frac{\lambda}{l} = \frac{1}{\varkappa}$$

Wir erhalten demnach vermöge (46) und mit Berücksichtigung, dass $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$ ist:

$$\frac{G^2}{\varkappa^2} = \frac{A_0}{(2\pi)^2}\,\frac{l^2}{\varkappa^2} + A_2 + A_4\,(2\pi)^2\,\frac{\varkappa^2}{l^2}$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\frac{1}{\varkappa^4} - \frac{A_2}{\mathfrak{G}^2 - \frac{A_0}{(2\pi)^2} l^2} \frac{1}{\varkappa^2} = \frac{A_4 (2\pi)^2}{l^2 \left[\mathfrak{G}^2 - \frac{A_0}{(2\pi)^2} l^2\right]}$$

und hieraus ergibt sich :

$$\frac{1}{\varkappa^2} = \frac{1}{2} \frac{A_2}{\mathfrak{G}^2 - \frac{A_0}{(2\pi)^2} l^2} \left[1 + \sqrt{1 + 4 \frac{A_4 (2\pi)^2}{A_2^2 l^2} \left(\mathfrak{G}^2 - \frac{A_0}{(2\pi)^2} l^2\right)}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Allein da die Brechungsquotienten der verschiedenen Strahlen so wenig verschieden sind, so muss man annehmen, dass sowohl $\frac{A_0}{(2\pi)^2} l^2$, als auch $\frac{A_4 (2\pi)^2}{l^2}$ im Verhältniss zu A_2 sehr kleine Grössen sind; es ist daher erlaubt, die Wurzelgrösse annähernd zu berechnen, und dann findet man :

$$\frac{1}{\varkappa^2} = \frac{A_2}{\mathfrak{G}^2 - \frac{A_0}{(2\pi)^2} l^2} + \frac{A_4}{A_2} \frac{(2\pi)^2}{l^2}$$

oder auch weil überhaupt $\varkappa$ mit l nur wenig veränderlich ist, also $\frac{A_0}{(2\pi)^2} l^2$ gegen $\mathfrak{G}^2$ klein sein muss, also annähernd

$$\frac{1}{\mathfrak{G}^2 - \frac{A_0}{(2\pi)^2} l^2} = \frac{1}{\mathfrak{G}^2} + \frac{A_0 l^2}{(2\pi)^2 \mathfrak{G}^4}$$

gesetzt werden darf :

$$\frac{1}{\varkappa^2} = \frac{A_2}{\mathfrak{G}^2} + \frac{A_0 A_2}{(2\pi)^2 \mathfrak{G}^4} l^2 + \frac{A_4}{A_2} \frac{(2\pi)^2}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

so ist, wenn wir zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{A_2}{\mathfrak{G}^2} \\ a_1 &= \frac{A_0 A_2}{(2\pi)^2 \mathfrak{G}^4} \\ a_2 &= \frac{A_4}{A_2} (2\pi)^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

setzen :

$$\frac{1}{\varkappa^2} = a_0 + a_1 l^2 + \frac{a_2}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

Diese Gleichung gibt die Brechungsverhältnisse verschiedenfarbiger Strahlen und sagt aus, dass in allen Medien Farbenzerstreuungen eintreten, in welchen a_1 und a_2 oder A_0 und A_4 nicht gleich Null sind, bestimmt also, wenn sie richtig ist, die Dispersion des Lichtes. Wir werden diese Formel später einer möglichst strengen Prüfung mit Thatsachen unterwerfen, zunächst wollen wir aber noch einige die Dispersion betreffende Verhältnisse berühren.

WARUM GIBT ES KEINE DISPERSION DER KÖRPERSCHWINGUNGEN ?

Legen wir uns die interessante Frage zur Beantwortung vor, warum es in dem Schwingungssysteme der Körperatome keine der Dispersion analoge Erscheinung gibt.

Es ist bereits Seite 117 bemerkt worden, dass wir die Schwingungsgesetze eines Körpermediums erhalten, wenn wir in die Rechnungsresultate, welche die Aetherschwingungen ausdrücken, die Grössen

$$H(\varrho) = \mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = \mathfrak{D} = \mathfrak{E} = \mathfrak{F} = \varepsilon = 0$$

setzen und das Symbol $J(r)$ mit $f(r)$ und μ mit m_1 vertauschen.

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Elementarätherwelle haben wir gefunden, Gleichung (46), Seite 135 :

$$v^2 = \frac{A_0}{\alpha^2} + A_2 + A_4\,\alpha^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (51)$$

wobei ist :

$$\left.\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{2}(\mathfrak{A} + \varepsilon) \\
A_2 &= -\frac{1}{2}\, S\, \frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,J(r)\right)}{d\,r}\,\Delta y^2\right]\frac{\Delta x^2}{1\,.\,2} \\
A_4 &= +\frac{1}{2}\, S\, \frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,J(r)\right)}{d\,r}\,\Delta y^2\right]\frac{\Delta x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (52)$$

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V einer elementaren Körperatom-Welle haben wir demnach einen Ausdruck von der Form :

$$V^2 = B_2 + B_4\,\alpha^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (53)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned}
B_2 &= -\frac{1}{2}\, S\, \frac{m_1}{r}\left[f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{d\,r}\,\Delta y^2\right]\frac{\Delta x^2}{1\,.\,2} \\
B_4 &= +\frac{1}{2}\, S\, \frac{m_1}{r}\left[f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{d\,r}\,\Delta y^2\right]\frac{\Delta x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (54)$$

Wenn wir berücksichtigen : 1) dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Aetherwelle ungefähr 4000 Meilen beträgt, die des Schalles aber nur 400 Meter; 2) dass der Unterschied der Brechbarkeit der Lichtstrahlen von verschiedener Farbe nicht gross ist; 3) dass in dem System der Körperatomwellen die Erscheinung der Dispersion entweder

gar nicht oder doch nur in einem äusserst schwachen Maasse stattfindet; so können wir aus den Gleichungen (51) bis (54) mehrere interessante Folgerungen ziehen.

Aus der Thatsache, dass V gegen v beinahe verschwindend klein ist, folgt zunächst, dass der Coeffizient B_2 im Vergleich zu A_2 verschwindend klein ist, obgleich die Masse m_1 eines Körperatoms viel grösser ist als die Masse μ einer Aetherhülle. Dies folgt auch aus unserer Theorie, wie aus folgenden Bemerkungen erhellen wird.

Es ist die Wechselwirkung $J(r)$ zweier Aetheratome stets abstossend; in den Ausdrücken (52) haben daher alle Glieder der Summe einerlei Zeichen, und der Gesammtbetrag dieser Glieder und insbesondere der Werth von A_2 kann also, namentlich wenn $J(r)$, d. h. die Kraft, mit welcher sich zwei Aethermasseneinheiten in der Entfernung r abstossen, verhältnissmässig sehr gross ist, sehr beträchtlich werden. Anders verhält es sich mit dem Werth von B_2. Vermöge der Gleichung (21), S. 77, ist $S\, m_1 \frac{f(r)}{r} \Delta x^2 = o$, der Werth von B_2 wird demnach:

$$B_2 = -\frac{1}{2}\, S\, m_1 \frac{d\left(\frac{1}{r}\, f(r)\right)}{d\, r} \frac{\Delta y^2\, \Delta x^2}{r}$$

Allein $f(r)$, d. h. die Wechselwirkung zweier Dynamiden ist, wie wir Seite 55, Gleichung (7) gezeigt haben, je nach dem Werth von r positiv oder negativ; von den Gliedern der obigen Summe ist daher eine Parthie positiv, eine andere Parthie negativ; diese Summe ist also die Differenz einer Reihe von positiven und einer Reihe von negativen Zahlen, diese Differenz kann also sehr klein ausfallen und wird es wohl auch, weil der stets positiv bleibende Faktor $\frac{\Delta y^2\, \Delta x^2}{r}$ eine sehr kleine Grösse ist. Die rasche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Aetherwelle und langsame Fortpflanzung der Schallwelle findet also ihre Erklärung vorzugsweise in dem Umstand, dass alle Glieder der Summe in dem Ausdruck für A_2 einerlei Zeichen haben, dass dagegen für ein Körpermedium

$$S\, m_1 \frac{f(r)}{r} \Delta x^2 = o$$

ist.

Ob in den Körpermedien Dispersion stattfindet oder nicht, und wenn sie stattfindet, in welchem Maasse sie auftritt, hängt von dem Werth von B_4 ab. Wäre B_4 absolut gleich Null, so wäre $V^2 = B_2$, d. h. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wäre dann unabhängig von der Wellenlänge und es gäbe dann gar keine Dispersion. Ist dagegen B_4 zwar nicht Null, aber doch sehr klein, so ist eine sehr schwache Dispersion vorhanden. Nun ist:

$$B_4 = \frac{1}{2}\, S\, \frac{m_1}{r}\left[f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\, f(r)\right)}{d\, r} \Delta y^2\right] \frac{\Delta x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$$

wohl nicht Null, gewiss aber eine äusserst kleine Grösse, weil die Glieder der Summe nicht immer einerlei Zeichen haben, weil ferner der Faktor Δx^4 eine ungemein kleine Grösse ist, weil endlich $f(r)$ mit dem Wachsen von r sehr rasch abnimmt.

Die später folgenden numerischen Rechnungen werden zeigen, dass die Coefficienten a_0 und a_1 positiv sind, der Coefficient a_2 dagegen negativ ist. A_0 und A_2 sind daher vermöge (49) positiv, A_1 dagegen ist negativ.

Allein es ist:

$$A_2 = -\frac{1}{2} S \frac{\mu_1}{r} \left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{dr} \Delta y^2 \right] \frac{\Delta x^2}{1.2}$$

Dieser Ausdruck kann daher, weil r, $J(r)$ und Δx^2 stets positiv ist, nur dann positiv werden, wenn $\frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{dr} \Delta y^2$ negativ und wenigstens für eine gewisse Reihe von Werthen von r numerisch grösser als $J(r)$ ausfällt.

Aus der Formel (50) ergibt sich das interessante Resultat, dass zweierlei Ursachen vorhanden sind, welche Dispersion veranlassen; denn es sind in dieser Formel zwei von der Wellenlänge abhängige Glieder vorhanden. Das Glied $\frac{a_2}{l^2}$ hängt nur von der Wirkung des Aethers auf sich selbst ab, das Glied $a_1 l^2$ drückt dagegen die Einwirkung des Körpermediums auf das Aethermedium aus, denn vermöge (8), Seite 116, ist:

$$A_0 = \frac{1}{2}(\mathfrak{A} + \varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2} S m_1 \left[\frac{G(r)}{r} + \frac{1}{r} \frac{d\left(\frac{1}{r} G(r)\right)}{dr} \Delta x^2 \right]$$

Ich habe zuerst vermuthet, dass die Dispersion $a_1 l^2$, welche das Körpermedium verursacht, beträchtlicher sein würde als jene, welche das Aethermedium hervorbringt; allein so ist es nicht. Die numerischen Rechnungen zeigen, dass die Werthe von $\frac{a_2}{l^2}$ grösser ausfallen als die Werthe von $a_1 l^2$.

PRÜFUNG DER FORMEL (50).

Die von *Frauenhofer* durch Beobachtungen und Rechnungen aufgefundenen Werthe der Wellenlängen und Brechungsverhältnisse für Lichtstrahlen von verschiedenen Farben setzen uns in den Stand, die Formel (50), nämlich:

$$\frac{1}{\varkappa^2} = a_0 + a_1 l^2 + \frac{a_2}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

einer numerischen Prüfung zu unterwerfen.

Frauenhofer hat bekanntlich die Wellenlängen und Brechungsverhältnisse derjenigen farbigen Strahlen bestimmt, welche gewissen im Spektrum sich zeigenden dunkeln Linien zunächst liegen.

Nach diesen Messungen haben die Strahlen, welche den von *Frauenhofer* mit B C D E F G H bezeichneten dunkeln Linien entsprechen, bei ihrem Durchgang durch Luft folgende Werthe, in Pariser Zollen ausgedrückt:

	B	C	D	E	F	G	H
$10^{8}\ l =$	2541	2425	2175	1943	1789	1585	1451
demnach $10^{16}\ l^{2} =$	6492304	5880625	4730625	3775249	3200521	2012225	2105401
und $\frac{1}{l^{2}} =$	15402 . 10^{5}	17005 . 10^{5}	21138 . 10^{5}	26488 . 10^{5}	31244 . 10^{5}	39805 . 10^{5}	47496 . 10^{5}

Für den Durchgang dieser Strahlen durch ein mit Wasser gefülltes Prisma hat *Frauenhofer* folgende Brechungsverhältnisse gefunden :

	B	C	D	E	F	G	H
$\varkappa =$	1·330935	1·331712	1·333577	1·335851	1·337818	1·341293	1·344177

Hieraus findet man :

$\frac{1}{\varkappa_2} =$	0·56453	0·56387	0·56223	0·56038	0·55873	0·55580	0·55346

Setzt man die den Strahlen B E H entsprechenden Zahlen in die zu prüfende Formel (55), so erhält man zur Bestimmung der Constanten $a_0\ a_1\ a_2$ folgende drei Gleichungen

$$\text{B)}\qquad 0{\cdot}56453 = a_0 + \frac{6492304}{10^{16}}\,a_1 + 15402\ .\ 10^{5}\ a_2$$

$$\text{E)}\qquad 0{\cdot}56038 = a_0 + \frac{3775249}{10^{16}}\,a_1 + 26488\ .\ 10^{5}\ a_2$$

$$\text{H)}\qquad 0{\cdot}55346 = a_0 + \frac{2105401}{10^{16}}\,a_1 + 47496\ .\ 10^{5}\ a_2$$

Hieraus findet man folgende Werthe :

$$a_0 = +\,0{\cdot}56751$$

$$a_1 = +\,2713898$$

$$a_2 = -\,\frac{3{\cdot}078286}{10^{12}}$$

Für den Durchgang durch Wasser hat man also :

$$\frac{1}{\varkappa^2} = 0{\cdot}56751 + 2713898\ l^2 - \frac{3{\cdot}078286}{10^{12}}\cdot\frac{1}{l^2}$$

Berechnet man mit dieser Formel die Werthe von $\frac{1}{\varkappa^2}$ für sämmtliche Strahlen B C D E F G H und vergleicht die Rechnungsresultate mit den Beobachtungsresultaten, so erhält man folgende Tabelle :

		B	C	D	E	F	G	H
$\frac{1}{\varkappa^2}$	Rechnung	0·56453	0·56395	0·56229	0·56038	0·55876	0·55594	0·55346
	Beobachtung	0·56453	0·56387	0·56223	0·56038	0·55873	0·55580	0·55346

Man sieht, dass die Zahlen der Rechnung mit den Zahlen der Beobachtung beinahe identisch sind. Wir dürfen also wohl sagen, dass unsere Theorie mit den Thatsachen gut harmonirt.

DAS FARBENZERSTREUUNGS-VERMÖGEN.

Das Farbenzerstreuungsvermögen einer Substanz kann durch den Winkel gemessen werden, welchen die den dunkeln Linien B und H entsprechenden Strahlen zusammen bilden.

Nennen wir l_1 $\varkappa_1$ und l_2 $\varkappa_2$ die den Strahlen B und H entsprechenden Wellenlängen und Brechungsverhältnisse, so ist vermöge der Gleichung (50):

$$\frac{1}{\varkappa_1^2} = a_0 + a_1 l_1^2 + \frac{a_2}{l_1^2}$$

$$\frac{1}{\varkappa_2^2} = a_0 + a_1 l_2^2 + \frac{a_2}{l_2^2}$$

oder:

$$\frac{1}{\varkappa_1} = a_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{a_1}{a_0} l_1^2 + \frac{a_2}{a_0} \frac{1}{l_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{\varkappa_2} = a_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{a_1}{a_0} l_2^2 + \frac{a_2}{a_0} \frac{1}{l_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Nennt man α den Winkel des einfallenden Strahles mit dem Einfallsloth, α_1 α_2 die Winkel, welche die Strahlen B und H mit dem Einfallsloth bilden, so ist:

$$\frac{1}{\varkappa_1} = \frac{\sin. \alpha_1}{\sin. \alpha}$$

$$\frac{1}{\varkappa_2} = \frac{\sin. \alpha_2}{\sin. \alpha}$$

$$\frac{\sin. \alpha_1}{\sin. \alpha} = a_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{a_1}{a_0} l_1^2 + \frac{a_2}{a_0} \frac{1}{l_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\sin. \alpha_2}{\sin. \alpha} = a_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{a_1}{a_0} l_2^2 + \frac{a_2}{a_0} \frac{1}{l_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Allein der Betrag der Glieder, welche in den Klammern auf die Einheit folgen, ist gegen die Einheit ungemein klein; man kann daher diese Ausdrücke vermittelst der Binomialformel entwickeln und die auf das zweite Glied folgenden Glieder vernachlässigen. Dann findet man:

$$\frac{\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2}{\sin\alpha} = a_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2} \frac{a_1}{a_0} (l_1^2 - l_2^2) - \frac{1}{2} \frac{a_2}{a_0} \left(\frac{1}{l_1^2} - \frac{1}{l_2^2} \right) \right]$$

Diesen Ausdruck kann man als das Maass des Farbenzerstreuungsvermögens gelten lassen.

Dieser Ausdruck bestimmt nun wiederum einen wesentlichen Unterschied zwischen der Lichttheorie von *Cauchy* und der hier entwickelten. Vermöge der Ausdrücke (49) und (52) ist:

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{1}{2\pi^2 G^2} A_0 = \frac{\frac{1}{2}\mathfrak{A} - \varepsilon}{2\pi^2 G^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi^2 G^2} \left\{ \varepsilon - S m_1 \left[\frac{G r}{r} + \frac{1}{2} \frac{d\left(\frac{1}{r} G r\right)}{d r} \Delta x^2 \right] \right\}$$

$$\frac{a_2}{a_0} = 2\pi^2 G^2 \frac{A_1}{A_0^2} = 2\pi^2 G^2 \frac{\frac{1}{2} S \frac{\alpha_1}{r} \left[J r + \frac{d\left(\frac{1}{r} J r\right)}{d r} \Delta y^2 \right] \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4}}{\frac{1}{4} \left\{ S \frac{\alpha_1}{r} \left[J r + \frac{d\left(\frac{1}{r} J r\right)}{d r} \Delta y^2 \right] \frac{\Delta x^2}{1.2} \right\}^2}$$

Für die Theorie von *Cauchy*, welche die Wechselwirkung zwischen den Aether- und Körperatomen nicht berücksichtigt, ist ε und $G r$ gleich Null zu setzen, ist daher das mit $\frac{a_1}{a_0}$ multiplizirte Glied ganz wegzulassen, und ist demnach das Farbenzerstreuungsvermögen $\frac{\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2}{\sin\alpha}$ von der Natur der Körperatome des brechenden Mediums ganz unabhängig, d. h. *Cauchy's* Theorie gibt für alle Medien einerlei Farbenzerstreuungsvermögen, was der Thatsache grob widerspricht.

Bei unserer Theorie dagegen ist ε und $G r$ nicht gleich Null, sondern es hat der Quotient $\frac{a_1}{a_0}$ für jedes besondere brechende Medium einen individuellen Werth, richtet sich also das Farbenzerstreuungsvermögen nach der Natur der brechenden Substanz, wie es die Thatsachen fordern.

TAFEL ZUR DYNAMIDEN-THEORIE

